

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Criterios de selección de modelo en cálculo de provisiones no vida

Autoría: Emma Novella Weiss

Tutoría: Eva Boj y Teresa Costa

Curso académico: 2020-2021



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat d'Economia
i Empresa

Màster
de Ciències
Actuarials
i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Criterios de selección de modelo en cálculo de provisiones no vida

Autoría: Emma Novella Weiss

Tutoría: Eva Boj y Teresa Costa

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”

RESUMEN

El trabajo de final de máster se centra en el cálculo de provisiones técnicas de seguros no vida. El principal objetivo es analizar diferentes criterios para determinar qué modelo estima de forma más fiable o adecuada para la entidad aseguradora las provisiones técnicas futuras. Se utilizan diferentes métodos de cálculo de provisiones, de los que se realiza una explicación y se ilustra su uso con la base de datos MW2008. Los cálculos del caso práctico se realizan con el programa R y con algunos de sus paquetes.

PALABRAS CLAVES: Provisiones técnicas, Chain-Ladder, Modelo Lineal Generalizado, MW2008, R.

ABSTRACT

The master's thesis focuses on the calculation of claims reserving in non-life insurance. The main objective is to analyze different criteria to determine which model estimates most reliably or appropriately for the insurer the future claims reserves. Different methods of calculating provisions are used, their explanation is made and the use of them is illustrated with the MW2008 database. Case study calculations are performed with the R program and some of its packages.

KEYWORDS: Claims reserving, Chain-Ladder, Generalized Linear Model, MW2008, R.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN	1
1.1. Objetivos.....	1
1.2. Estructura del trabajo	1
2. CÁLCULO DE PROVISIONES NO VIDA.....	2
3. MÉTODOS ACTUARIALES	7
3.1. Datos	7
3.2. Modelos deterministas	8
3.2.1. Chain-Ladder.....	9
3.2.2. Variantes de Chain-Ladder.....	10
3.2.3. Mínimos cuadrados de De Vylder.....	11
3.3. Modelos estocásticos	12
3.3.1. Modelo de Mack.....	13
3.3.2. Modelo lineal generalizado	14
4. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE MODELO	17
4.1. Errores de predicción en el modelo lineal generalizado	17
4.2. Errores de predicción en el modelo de Mack	20
4.3. Error en la estimación de los datos originales del triángulo de desarrollo	20
4.4. El resultado de desarrollo de las reclamaciones (CDR).....	21
5. CASO PRÁCTICO	22
5.1. Triángulos de cuantías	22
5.2. Aplicación de las metodologías	23
5.2.1. Modelo Chain-Ladder	23
5.2.2. Variantes del modelo Chain-Ladder	25
5.2.3. Mínimos cuadrados de De Vylder.....	29
5.2.4. Modelo de Mack.....	31
5.2.5. Modelo lineal generalizado	33
5.3. Análisis de selección de triángulos	41
5. CONCLUSIONES.....	46
6. BIBLIOGRAFÍA.....	47
7. ANEXO	49

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Las entidades aseguradoras ofrecen a sus clientes distintos seguros de no vida, en la actualidad, los más conocidos son el seguro de robo, de incendio, de responsabilidad civil, de automóvil y de hogar. Normalmente, los seguros de no vida son contratos de duración anual y, por lo tanto, se renuevan anualmente si el asegurado lo decide.

Para poder hacer frente a los pagos futuros de siniestros ocurridos durante un año que no se han pagado en el año de ocurrencia, las entidades aseguradoras y reaseguradoras deben tener un “colchón”, denominado provisiones técnicas.

El cálculo de las provisiones técnicas se puede realizar aplicando diversos métodos actuariales.

Además, es necesario tener en cuenta la legislación que regula el cálculo de las provisiones técnicas:

- La Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras.
- Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras.
- Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

1.1. Objetivos

El objetivo de este trabajo es comparar los resultados que se obtienen de los distintos métodos de cálculo de provisiones no vida para la toma de decisiones de la empresa aseguradora. Para cada metodología se establecen criterios de análisis y de elección. Además, para cada criterio se realiza una aplicación ilustrativa y una interpretación.

1.2. Estructura del trabajo

El trabajo se estructura en cuatro apartados. En el primero se incluirá una introducción sobre las provisiones técnicas. Además, se presentarán las normativas y algunos conceptos esenciales para valorarlas. En el segundo apartado se explicarán los distintos métodos deterministas y estocásticos que se aplican para su cálculo. En el tercer apartado se detallarán las metodologías que se usarán para los criterios de elección del método de cálculo de provisiones, que se aplicarán en el caso práctico. En el cuarto apartado se utilizarán los datos de Merz y Wüthrich (2008) para calcular las estimaciones de las provisiones técnicas y elegir entre los distintos métodos a partir de los criterios descritos en el tercer apartado y poder realizar una toma de decisiones para esos datos. Por último, se presentarán las conclusiones y la bibliografía consultada.

En el anexo se incluirá todo el código de R utilizado para el desarrollo de la parte práctica del trabajo.

2. CÁLCULO DE PROVISIONES NO VIDA

La Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, en el artículo 69 define las provisiones técnicas como *“todas las obligaciones derivadas de contratos de seguro y de reaseguro. Las provisiones técnicas forman parte de las deudas de las entidades aseguradoras y reaseguradoras”*. A su vez, en el mismo artículo se define el valor de las provisiones técnicas como *“el importe actual que las entidades aseguradoras y reaseguradoras tendrían que pagar si transfirieran sus obligaciones de seguro y reaseguro de manera inmediata a otra entidad aseguradora o reaseguradora”*.

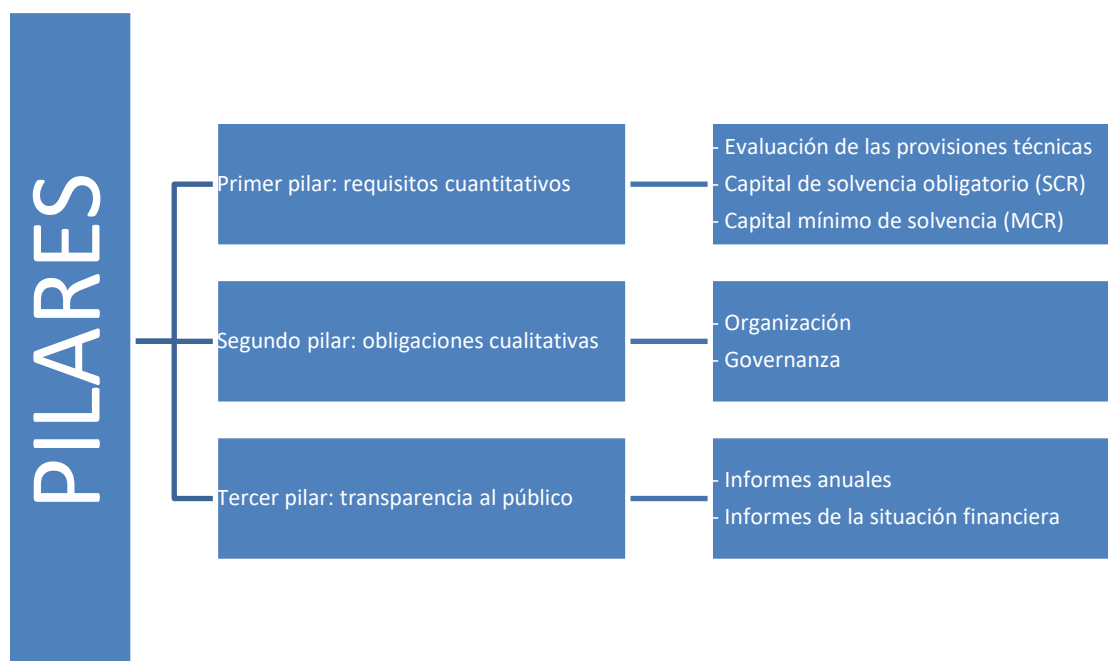
Como se ha dicho anteriormente, las entidades aseguradoras y reaseguradoras deben tener en cuenta las leyes españolas que regulan las provisiones técnicas, es decir, la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras y el Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras. Aparte de las leyes españolas deben tener en cuenta la normativa europea que se encuentra englobada en la Directiva de Solvencia II.

El Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II) está constituido por tres bloques diferenciados, el primero está centrado en los tres pilares de Solvencia II, el segundo trata sobre los grupos de seguro y finalmente el último está dedicado principalmente a temas fiscales. En este apartado nos centraremos en el primer bloque, concretamente en el capítulo III, denominado normas relativas a las provisiones técnicas.

Solvencia II entró en vigor el 1 de enero de 2016 y es un reglamento que se aplica al sector asegurador. Su objetivo principal es que las entidades aseguradoras evalúen mejor sus riesgos y que apliquen los reglamentos a los riesgos en los que las entidades aseguradoras y reaseguradoras incurren en su actividad. Por lo tanto, Solvencia II es un reglamento prudencial.

Los requisitos de Solvencia II se estructuran en tres pilares:

Gráfico 1: Pilares de Solvencia II



Elaboración propia a partir del *Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*.

Como se puede observar, el cálculo de las provisiones técnicas se encuentra en el primer pilar, de requisitos cuantitativos. Además, en este primer pilar, Solvencia II deja una gran libertad de estimación a las entidades aseguradoras, por ejemplo, el cálculo del SCR o del MCR se puede hacer a partir de una fórmula estándar o mediante un modelo interno.

Tal y como indica el artículo 82 de la Directiva 2009/138/CE, para realizar el cálculo de las provisiones técnicas es necesario que los datos utilizados para su cálculo cumplan una de estas tres condiciones:

- Completos: los datos incluyen suficiente información histórica para identificar la tendencia de los riesgos y que todos los datos pertinentes se utilicen para el cálculo de las provisiones técnicas.
- Exactos: *“que los datos no contengan errores significativos, que los datos de diferentes períodos utilizados para una misma estimación sean coherentes y que los datos se registren de forma oportuna y coherente en el tiempo”*¹
- Adecuados: *“que los datos sean coherentes con los fines para los que se vaya a utilizar; que el importe y la naturaleza de los datos garanticen que las estimaciones realizadas en el cálculo de las provisiones técnicas sobre la base de los mismos no incluyan un error de estimación significativo; que los datos sean coherentes con las hipótesis que se basan las técnicas actuariales y estadísticas que se les apliquen al calcular las provisiones técnicas; que los datos reflejen*

¹ Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

*adecuadamente los riesgos a los que está expuesta la empresa de seguros o reaseguros en relación con sus obligaciones de seguro y reaseguro; que los datos que se haya recopilado, tratado y aplicado de forma transparente y estructurada [...]; que las empresas de seguros o reaseguros garanticen que sus datos se utilicen de forma coherente en el tiempo para calcular las provisiones técnicas.”*²

En caso de que los datos no sean completos, exactos o adecuados, la empresa aseguradora o reaseguradora deberá notificarlo y buscar una alternativa.

El cálculo de las provisiones técnicas está recogido en la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras y por el Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras.

Tal y como indica el artículo 69 de la Ley 20/2015, de 14 de julio, el valor de las provisiones técnicas será igual a la suma de la mejor estimación y de un margen de riesgo, siendo:

- *“**La mejor estimación** se corresponderá con la media de los flujos de caja futuros ponderada por su probabilidad, teniendo en cuenta el valor temporal del dinero mediante la aplicación de la pertinente estructura temporal de tipos de interés sin riesgo, es decir, el valor actual esperado de los flujos de caja futuros. Se deberá calcular en términos brutos.*
- ***El margen de riesgo** será tal que se garantice que el valor de las provisiones técnicas sea equivalente al importe que las entidades aseguradoras y reaseguradoras previsiblemente exigirían para poder asumir y cumplir las obligaciones del seguro y del reaseguro.”*³

Además, la misma ley indica que las entidades aseguradoras y reaseguras deberán calcular el margen de riesgo y la mejor estimación por separado. Se podrá calcular conjuntamente en caso de que los flujos de caja futuros puedan reproducirse mediante instrumentos financieros de los cuales se pueda encontrar un valor de mercado fiable.

Si la entidad no dispone de datos completos, exactos o suficientes, como se indicó anteriormente, se deberá notificar y buscar una alternativa, pero, además, la aseguradora o reaseguradora no podrá determinar el valor fiable de la provisión técnica, en este caso, se permite hacer aproximaciones para la mejor estimación.

La mayoría de las entidades aseguradoras y reaseguradoras que ofrezcan seguros de no vida deberán calcular el margen de riesgo y la mejor estimación por separado. En este caso, *“el margen de riesgo será igual al coste de financiar el capital de solvencia*

² Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

³ Definición de *Tarificación y provisiones (tercera edición)* de Boj et al. (2020).

*obligatorio exigible por asumir las obligaciones de seguro y reaseguro durante su período de vigencia.”*⁴ El margen de riesgo se calculará de la siguiente forma:

$$MR = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1+r(t+1))^{t+1}} \text{ ”}^5$$

siendo,

- *CoC*, la tasa de coste del capital. La Directiva 2009/138/CE en el artículo 77, concretamente en el apartado 5, determina que el coste del capital es igual al 6%.
- *SCR(t)*, el capital de solvencia obligatorio al cabo de *t* años.
- *r(t + 1)*, tipo de interés sin riesgo básico correspondiente al vencimiento de *t + 1* años.

El cálculo de la mejor estimación, si se calcula por separado, “*incluira todos los flujos de caja siguientes, en la medida en que tales flujos de caja se correspondan con contratos de seguro y reaseguro existentes:*

- a) Pagos de prestaciones a tomadores y beneficiarios de seguros;*
- b) Pagos que la empresa de seguros y reaseguros deberá satisfacer al proporcionar prestaciones contractuales que se paguen en especie;*
- c) Pagos de los gastos de administración, de gestión de inversiones y de adquisición. En todos ellos se tendrán en cuenta los gastos generales de administración. Los gastos se proyectarán partiendo del supuesto de que la empresa desarrollará nuevas actividades en el futuro.*
- d) Pagos de primas y cualquier flujo de caja adicional que se derive de tales primas;*
- e) Pagos entre la empresa de seguros o reaseguros e intermediarios en relación con obligaciones de seguro o reaseguro;*
- f) Pagos entre la empresa de seguros y reaseguros y empresas de inversión en relación con contratos con prestaciones vinculadas a índices o a fondos de inversiones;*
- g) Pagos por salvamento y subrogación, en la medida en que no puedan considerarse activos o pasivos separados con arreglo a las normas internacionales de contabilidad, aprobadas por la Comisión en virtud del Reglamento (CE) no 1606/2002;*
- h) Pagos de impuestos cobrados, o que se prevea cobrar, a los tomadores de seguros, o que se precisen para liquidar las obligaciones de seguro o reaseguro.”*⁶

La mejor estimación se debe calcular por separado para cada línea de negocio. Cada línea de negocio está asociada a la naturaleza del riesgo subyacente. En el Reglamento

⁴ Definición dada en el artículo 48 del Capítulo 2 del Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras.

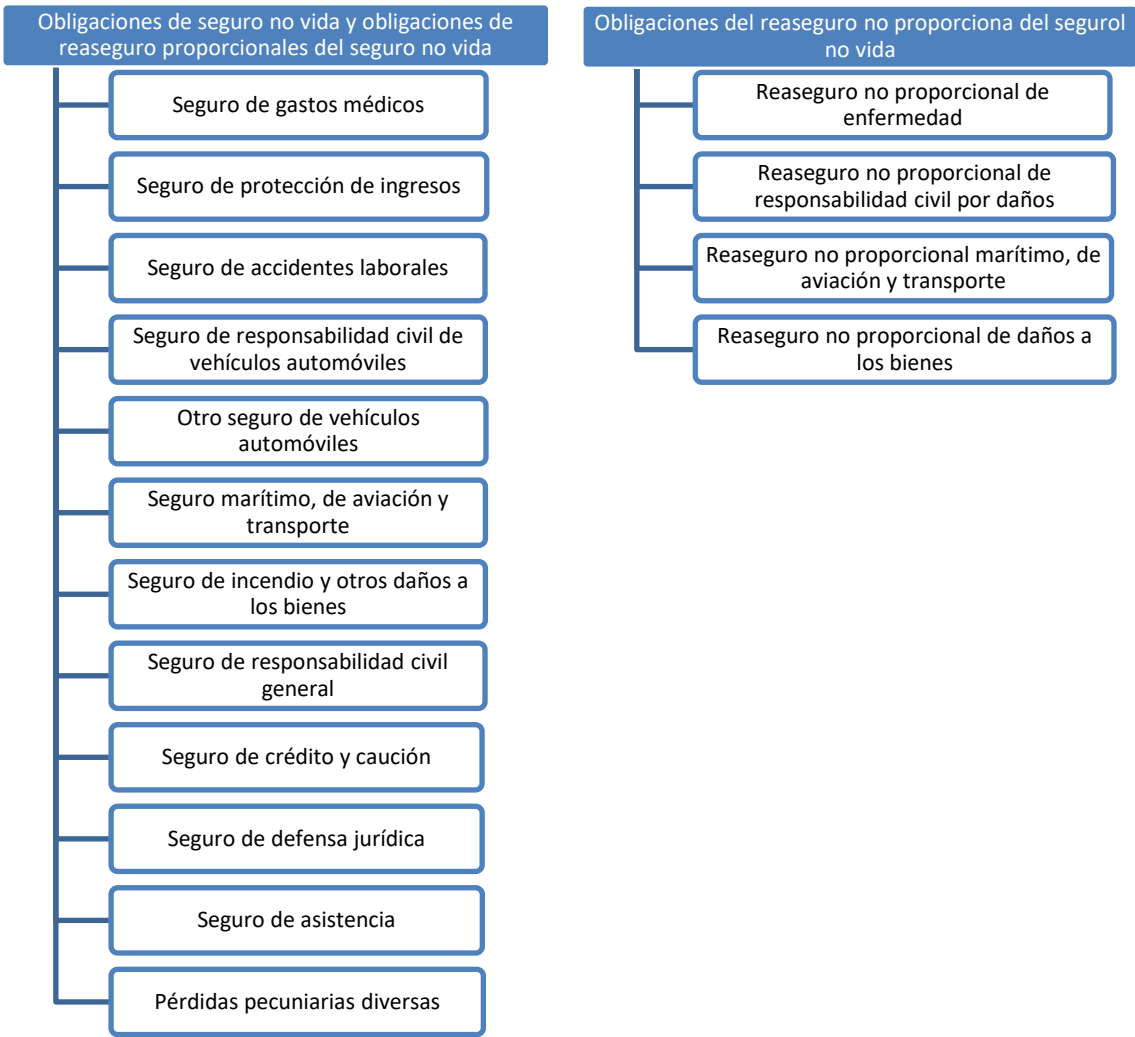
⁵ Formula dada en el artículo 37 del Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

⁶ Definición dada en el artículo 28 del Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio, concretamente en el Anexo I, se encuentran todas las líneas de negocio para los seguros de vida y de no vida.

A continuación, se presenta un esquema de las líneas de negocio de los seguros no vida:

Gráfico 2: Líneas de negocio de los seguros no vida



Elaboración propia a partir del Anexo I del Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

3. MÉTODOS ACTUARIALES

En este trabajo se describirán y aplicarán distintos métodos actuariales, que son utilizados para el cálculo de la mejor estimación en las provisiones técnicas. Por lo tanto, se supondrá que la entidad aseguradora y/o reaseguradora ha decidido calcular la mejor estimación y el margen de riesgo por separado, ya sea porque no se pueden reproducir los flujos de caja futuros mediante instrumentos financieros con un valor de mercado fiable, o bien, porque la empresa lo haya decidido así.

Hay distintas clasificaciones de los métodos actuariales (ver Boj et al., 2020):

“Según De Vylder (1986) y Taylor (1986) una primera clasificación sería la siguiente:

- **Micro-modelos:** los importes de los siniestros se tratan de forma separada.
- **Macro-modelos:** los importes de los siniestros se tratan de forma agregada.

Una segunda clasificación, y la que tendremos en cuenta en este trabajo, es la siguiente:

- **Modelos deterministas:** no interviene variables aleatorias.
- **Modelos estocásticos:** los siniestros se consideran realizaciones de variables aleatorias. [...]

Otros criterios de clasificación tienen en cuenta:

- Si el modelo considera (o no) el número de siniestros como variable dependiente.
- Las variables explicativas incluidas en el modelo: año de desarrollo, volumen de exposición, inflación, velocidad de finalización de los siniestros...”

3.1. Datos

Los datos que consideraremos en los modelos son los siguientes:

- i : año de origen o año de ocurrencia del siniestro.
- j : año de desarrollo.
- c_{ij} : cuantía pagada en el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i .
- \hat{c}_{ij} : estimación de la cuantía pagada no acumulada.
- C_{ij} : cuantía acumulada pagada hasta (e incluido) el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i .
- \hat{C}_{ij} : estimación de la cuantía acumulada pagada.
- n_i : número de siniestros ocurridos en el año de origen i .
- s_{ij} : cuantía media pagada en el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i .
- S_{ij} : cuantía media acumulada pagada hasta (e incluido) el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i .
- D : el dominio, años de origen y desarrollo para los que se dispone de datos.

- F : combinaciones de i, j que permiten completar el cuadrado de cuantías.

Se puede deducir que:

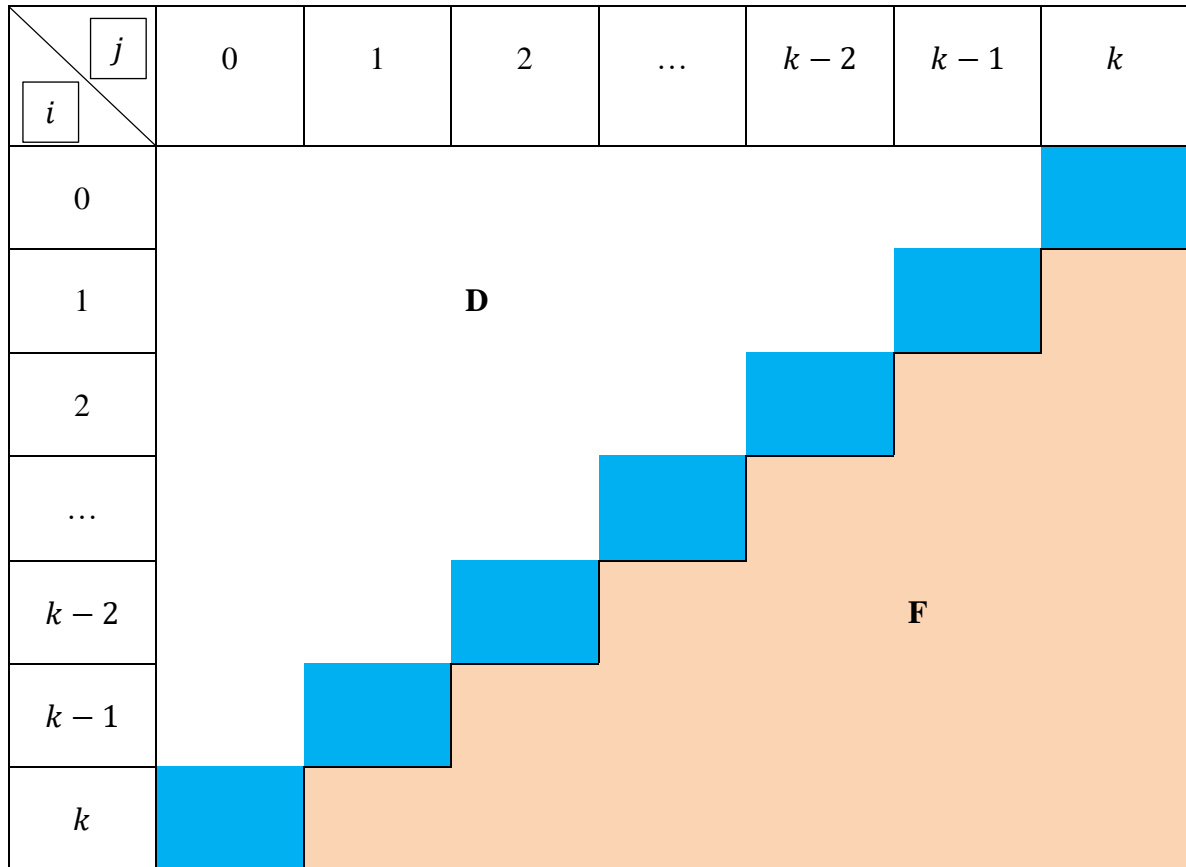
$$s_{ij} = \frac{c_{ij}}{n_i}.$$

y que,

$$S_{ij} = \frac{C_{ij}}{n_i}.$$

Como se puede observar en el siguiente gráfico, en las columnas se encuentra los años de desarrollo y en las filas los años origen. Habitualmente, el dominio D tiene forma triangular y los datos conocidos forman el denominado triángulo de desarrollo.

Gráfico 3: Gráfico del rectángulo



Fuente: Elaboración propia a partir de Boj, et al (2020).

La diagonal, sombreada en azul, se encuentra el año de cálculo de la reserva de los años de los cuales tengamos datos, los cuales forman parte del dominio.

3.2. Modelos deterministas

Los modelos deterministas son los más utilizados en la práctica porque son más sencillos que los modelos estocásticos. Se considerarán los siguientes modelos deterministas:

- Chain-Ladder.
- Variantes de Chain-Ladder.
- Mínimos cuadrados de De Vylder.

Con los modelos deterministas se podrá calcular la mejor estimación de las provisiones.

3.2.1. Chain-Ladder

El método Chain Ladder fue mencionado por primera vez por Tarbell (1934) y se empezó a utilizar esta metodología en los años 70. Las referencias que se usarán para explicar este modelo son Tarbell (1934), Kramreiter y Straub (1973), Clarke y Harland (1974), Skurnick (1973) y Boj et al. (2020). Es un método para hacer estimaciones de las cuantías acumuladas futuras, teniendo en cuenta que las tasas de inflación serán constantes.

Los datos de partida que se necesitan son las cuantías acumuladas pagadas hasta (e incluido) el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i . C_{ij} se dispondrán de la siguiente forma:

Gráfico 4: Gráfico del rectángulo de las cuantías acumuladas pagadas del método Chain-Ladder

$\begin{array}{c c} & j \\ \hline i & \end{array}$	0	1	2	...	$k-2$	$k-1$	k
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,(k-2)}$	$C_{0,(k-1)}$	$C_{0,k}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,(k-2)}$	$C_{1,(k-1)}$	$\hat{C}_{1,k}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,(k-2)}$	$\hat{C}_{2,(k-1)}$	$\hat{C}_{2,k}$
...
$k-2$	$C_{(k-2),0}$	$C_{(k-2),1}$	$C_{(k-2),2}$...	$\hat{C}_{(k-2),(k-2)}$	$\hat{C}_{(k-2),(k-1)}$	$\hat{C}_{(k-2),k}$
$k-1$	$C_{(k-1),0}$	$C_{(k-1),1}$	$\hat{C}_{(k-1),2}$...	$\hat{C}_{(k-1),(k-2)}$	$\hat{C}_{(k-1),(k-1)}$	$\hat{C}_{(k-1),k}$
k	$C_{k,0}$	$\hat{C}_{k,1}$	$\hat{C}_{k,2}$...	$\hat{C}_{k,(k-2)}$	$\hat{C}_{k,(k-1)}$	$\hat{C}_{k,k}$

Elaboración propia.

La hipótesis que considera el método Chain-Ladder es que las columnas del triángulo de reservas son proporcionales. La relación entre una columna y la siguiente se denominará estimador del cambio y la representaremos como \hat{m}_h , siendo:

$$\hat{m}_h = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}}.$$

Como se puede ver en la expresión anterior, el estimador del cambio se calcula dividiendo todas las cuantías acumuladas pagadas del dominio de un año de desarrollo por las cuantías acumuladas pagadas del dominio del año de desarrollo anterior.

Para calcular las estimaciones de las cuantías acumuladas futuras, es decir, las cuantías sombreadas en naranja del rectángulo de las cuantías acumuladas, se deberá utilizar la siguiente fórmula:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,k-1} \cdot \prod_{h=k-i}^{j-1} \hat{m}_h.$$

Este método también puede aplicarse si los datos de inicio son cuantías medias acumuladas pagadas.

3.2.2. Variantes de Chain-Ladder

Berquist y Sherman (1977) describieron distintas variantes del método Chain-Ladder.

En las dos variantes de Chain-Ladder los datos de partida son factores de desarrollo, d_{ij} , teniendo en cuenta que:

$$d_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}.$$

Por lo tanto, se dispondría del rectángulo de la siguiente forma:

Gráfico 5: Gráfico del rectángulo los factores de desarrollo de las variantes de Chain-Ladder

<div><div>i</div><div>j</div></div>	0	1	2	...	$k-2$	$k-1$
0	$d_{0,0}$	$d_{0,1}$	$d_{0,2}$...	$d_{0,(k-2)}$	$d_{0,(k-1)}$
1	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$...	$d_{1,(k-2)}$	$\hat{d}_{1,(k-1)}$
2	$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$...	$\hat{d}_{2,(k-2)}$	$\hat{d}_{2,(k-1)}$
...

$k - 2$	$d_{(k-2),0}$	$d_{(k-2),1}$	$\hat{d}_{(k-2),2}$	\dots	$d_{(k-2),(k-2)}$	$\hat{d}_{(k-2),(k-1)}$
$k - 1$	$d_{(k-1),0}$	$\hat{d}_{(k-1),1}$	$\hat{d}_{(k-1),2}$	\dots	$\hat{d}_{(k-1),(k-2)}$	$\hat{d}_{(k-1),(k-1)}$
k	$\hat{d}_{k,0}$	$\hat{d}_{k,1}$	$d_{k,2}$	\dots	$\hat{d}_{k,(k-2)}$	$\hat{d}_{k,(k-1)}$

Elaboración propia.

En una de las variantes de Chain-Ladder el factor de desarrollo es constante para cada año de origen. La estimación de los factores de desarrollo se hace a partir de la siguiente fórmula, siendo los pesos w_{ij} :

$$\hat{d}_h = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} w_{ih} \cdot d_{ih}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} w_{ih}}.$$

En el caso particular de que $w_{ih} = C_{ih}$, la variante de Chain-Ladder sería igual al caso del método Chain-Ladder, ya que se puede deducir lo siguiente:

$$\hat{d}_h = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih} \cdot d_{ih}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}} = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih} \cdot \frac{C_{i,h+1}}{C_{ih}}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}} = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}} = m \cdot h.$$

En la otra variante de Chain-Ladder se aplica un ajuste lineal por mínimos cuadrados a cada columna de factores de desarrollo.

3.2.3. Mínimos cuadrados de De Vylder

En el método de mínimos cuadrados de De Vylder (ver De Vylder, 1978 y Boj et al. 2020) tiene como datos de partida las cuantías pagadas en el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i , c_{ij} , y se dispondrán de la siguiente forma:

Gráfico 6: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas del método mínimos cuadrados de De Vylder

$i \backslash j$	0	1	2	\dots	$k - 2$	$k - 1$	k
0	$c_{0,0}$	$c_{0,1}$	$c_{0,2}$	\dots	$c_{0,(k-2)}$	$c_{0,(k-1)}$	$c_{0,k}$
1	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	\dots	$c_{1,(k-2)}$	$c_{1,(k-1)}$	$\hat{c}_{1,k}$
2	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	\dots	$c_{2,(k-2)}$	$\hat{c}_{2,(k-1)}$	$\hat{c}_{2,k}$

...
$k - 2$	$c_{(k-2),0}$	$c_{(k-2),1}$	$c_{(k-2),2}$...	$\hat{c}_{(k-2),(k-2)}$	$\hat{c}_{(k-2),(k-1)}$	$\hat{c}_{(k-2),k}$
$k - 1$	$c_{(k-1),0}$	$c_{(k-1),1}$	$\hat{c}_{(k-1),2}$...	$\hat{c}_{(k-1),(k-2)}$	$\hat{c}_{(k-1),(k-1)}$	$\hat{c}_{(k-1),k}$
k	$c_{k,0}$	$\hat{c}_{k,1}$	$\hat{c}_{k,2}$...	$\hat{c}_{k,(k-2)}$	$\hat{c}_{k,(k-1)}$	$\hat{c}_{k,k}$

Elaboración propia.

La hipótesis de partida es la siguiente:

$$c_{ij} = x_i \cdot p_j$$

siendo:

- x_i : la cuantía total a pagar de los siniestros ocurridos en el año de origen i .
- p_j : la proporción de x_i que se paga en el año de desarrollo j .

Se cumple que:

$$\sum_{j=0}^k p_j = 1.$$

Los estimadores de la cuantía total a pagar de los siniestros ocurridos en el año de origen y la proporción de dichas cuantías total se obtienen a partir de los mínimos cuadrados:

$$\text{Min} \sum_{\forall i,j \in D} (c_{ij} - x_i \cdot p_j)^2.$$

$$\hat{x}_i = \frac{\sum_{\forall j, \in j_i}^j c_{ij} \cdot p_j}{\sum_{\forall j, \in j_i}^j p_j^2}.$$

$$\hat{p}_j = \frac{\sum_{\forall j, \in i_j}^i c_{ij} \cdot x_i}{\sum_{\forall j, \in i_j}^i x_i^2}.$$

El modelo de los mínimos cuadrados de De Vylder se puede usar aunque la tasa de inflación sea constante.

3.3. Modelos estocásticos

Como se indica en Boj et al. (2020), dentro de los modelos estocásticos podemos distinguir:

- Modelos paramétricos: las distribuciones implicadas se suponen conocidas (Normal, Poisson, etc) pero ciertos parámetros deben ser estimados.
- Modelos de distribución libre: no se realizan hipótesis particulares sobre las distribuciones implicadas.

Algunos modelos estocásticos reproducen los resultados del método de Chain-Ladder.

3.3.1. Modelo de Mack

El modelo de Mack (Mack, 1993) es un modelo estocástico y, concretamente, un modelo de distribución libre. La principal ventaja de este modelo con respecto al de Chain-Ladder es que se pueden obtener los errores del valor esperado de las provisiones.

Los datos de partida de este modelo son las cuantías acumuladas pagadas hasta (e incluido) el año de desarrollo j respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen i , C_{ij} , igual que en el modelo Chain-Ladder.

Las hipótesis del modelo son las siguientes:

“Primera hipótesis:

$$E \left[\frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} \middle| C_{i,h} \right] = m_h \text{ para } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ y } h = 0, \dots, k-1,$$

o de forma equivalente,

$$E[C_{i,h+1} | C_{i,h}] = m_h \cdot C_{i,h} \text{ para } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ y } h = 0, \dots, k-1.$$

Segunda hipótesis:

$$V \left[\frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} \middle| C_{i,h} \right] = \sigma_h^2 \text{ para } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ y } h = 0, \dots, k-1,$$

o de forma equivalente,

$$V[C_{i,h+1} | C_{i,h}] = \sigma_h^2 \cdot C_{i,h} \text{ para } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ y } h = 0, \dots, k-1.$$

Tercera hipótesis:

C_{i_1, j_1} y C_{i_2, j_2} son variables aleatorias independientes para $i_1 \neq i_2$.”

Este modelo, al igual que el modelo Chain-Ladder, utiliza el factor de cambio de columna, \hat{m}_h :

$$\hat{m}_h = \sum_{i=0}^{k-h-1} \frac{C_{ih}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}} \cdot \frac{C_{i,h+1}}{C_{ih}} = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{ih}}.$$

Al ser \hat{m}_h la media aritmética ponderada de los factores de desarrollo de las cuantías acumuladas de los datos de partida, el estimador \hat{m}_h del modelo Mack coincide con el estimador del modelo Chain-Ladder.

Si para las estimaciones de las cuantías acumuladas pagadas aplicamos la hipótesis 1, 2 y 3, entonces su expresión es la siguiente:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,k-i} \cdot \prod_{h=k-i}^{j-1} \hat{m}_h.$$

3.3.2. Modelo lineal generalizado

“Supongamos la variable aleatoria $Y_{(n \times 1)}$, (y_i) para $i = 1, 2, \dots, n$ observaciones de la respuesta independientes, que recogen la siniestralidad a explicar en el modelo. Supongamos P predictores o factores potenciales de la estructura de riesgo F_1, F_2, \dots, F_P vectores $(n \times 1)$: (f_{ij}) para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, P$.” (Boj y Costa, 2014).

En el modelo clásico de regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios, el error tiene una distribución Normal centrada, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, entonces:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^P B_j f_{ij} + \varepsilon_i.$$

siendo,

- y_i : la variable respuesta, es decir, la frecuencia de la siniestralidad.
- f_{ij} : los factores de riesgo.

El predictor lineal determinista, η_i se obtiene de la siguiente expresión:

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^P B_j f_{ij}.$$

En el modelo lineal generalizado hay dos variaciones respecto al modelo clásico.

En el modelo clásico de regresión lineal es necesario que Y siga una distribución Normal, en cambio, en el modelo lineal generalizado la variable dependiente puede provenir de una distribución exponencial McCullagh y Nelder (1989) y la función de densidad es la siguiente:

$$f(y_i; \theta_i, \phi_i) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right\}.$$

siendo,

- θ_i : el parámetro canónico.
- ϕ_i : el parámetro de dispersión.

- $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$: funciones especificadas.

De la función anterior, mediante derivación, se puede deducir, respectivamente, la esperanza y la varianza de la variable dependiente:

$$\text{Var}[y_i] = b''(\theta_i) a(\theta_i).$$

siendo $b''(\theta_i)$ la función de varianza.

La función $a(\theta_i)$ suele expresarse de la siguiente forma:

$$a(\theta_i) = \frac{\phi}{w_i}.$$

siendo w_i los pesos para cada observación, que deben determinarse a priori, y con el parámetro de dispersión, ϕ , constante para cada una de ellas.

La segunda diferencia, entre ambos modelos es que en el modelo lineal generalizado la respuesta está relacionada con el predictor lineal a través de una función F :

$$E[y_i] = \mu_i = F(\eta_i) = F\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^P \beta_j f_{ij}\right).$$

Para obtener el predictor lineal se realizará la función inversa de F , para ello es necesario utilizar la *función de enlace* ($g = F^{-1}$).

$$g(E[y_i]) = g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^P \beta_j f_{ij}.$$

Para algunas distribuciones de la familia exponencial existen funciones de enlace canónicas. En este caso, el parámetro canónico coincide con el predictor lineal:

$$\theta(\mu_i) = \eta_i.$$

En lugar de utilizar las funciones de enlace canónicas, se pueden realizar enlaces paramétricos:

$$\eta_i = g(\mu_i) = \begin{cases} \mu_i^\lambda, \lambda \neq 0 \\ \log(\mu_i), \lambda = 0 \end{cases}$$

Si combinamos cualquier distribución del error con el enlace identidad, $\lambda = 1$, se utilizará el modelo aditivo:

$$\mu_i = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^P \beta_j f_{ij}.$$

En cambio, si combinamos cualquier distribución del error con el enlace logarítmico, $\lambda = 0$, se utilizará el modelo multiplicativo:

$$\log(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^P \beta_j f_{ij} \rightarrow \mu_i = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^P \beta_j f_{ij}\right).$$

En numerosos trabajos se describen la aplicación del modelo lineal generalizado para las estimaciones de las provisiones técnicas según los datos a utilizar y las hipótesis a aplicar (ver por ejemplo, England y Verall, 1999, 2002, 2006, Kaas et al., 2008 y Boj et al., 2020).

En este trabajo se aplicará el modelo lineal generalizado en dos supuestos distintos:

- Distribución de error Poisson sobredispersa y la función de enlace logarítmica. En este caso la estimación puntual de los pagos futuros será igual a los que obtendríamos con el modelo Chain-Ladder.
- Distribución de error Gamma y la función de enlace logarítmica.

Se aplica el modelo lineal generalizado para estimar las cuantías c_{ij} del triángulo de desarrollo, que será la variable respuesta, considerando dos factores de riesgo, el año de origen i y el año de desarrollo j .

Por lo tanto, tenemos que:

$$\mu_{ij} = E[c_{ij}].$$

Teniendo en cuenta que en el modelo lineal generalizado la función de varianza para las familias paramétrica es $V(c_{ij}) = \mu_{ij}^\xi$:

- en el caso de la distribución Poisson sobredispersa $V(c_{ij}) = \frac{\phi}{w_{ij}} \mu_{ij}$.
- en el caso de la distribución Gamma $V(c_{ij}) = \frac{\phi}{w_{ij}} \mu_{ij}^2$.

siendo los pesos $w_{ij} = 1$.

El predictor lineal tiene la siguiente forma:

$$\eta_{ij} = c_o + \alpha_i + \beta_j.$$

siendo,

- c_o : el término que se correspondería al año de origen 0 y año de desarrollo 0.
- α_i : el factor correspondiente a los años de origen.
- β_j : el factor correspondiente a los años de desarrollo.

Con la ecuación anterior se pueden determinar las estimaciones de las cuantías pagadas no acumuladas del triángulo, asumiendo la función de enlace logarítmica:

$$\hat{c}_{ij} = \exp(c_o + \alpha_i + \beta_j).$$

4. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE MODELO

Para seleccionar el modelo que mejor predice las provisiones futuras para los datos MW2008 de Merz y Wüthrich (2008) se tendrán en cuenta distintos criterios para analizar los resultados obtenidos con los métodos explicados en el punto 3.

4.1. Errores de predicción en el modelo lineal generalizado

Aplicando el modelo lineal generalizado se pueden calcular los errores de predicción cometidos con estos modelos estocásticos en el cálculo de las provisiones, tal como puede consultarse en England y Verrall (1999,2002,2006), Mack (1993), Kaas et al. (2008), Boj et al. (2014) y Boj y Costa (2017).

El error de predicción se calcula a partir de la raíz cuadrada del error cuadrático medio, que para cada estimación de la cuantía futura, \hat{c}_{ij} , se define como:

$$MSE(\hat{c}_{ij}) \cong Var[c_{ij}] + Var[\hat{c}_{ij}].$$

El primer término, $Var[c_{ij}]$, es la varianza de la distribución asumida y el segundo término, $Var[\hat{c}_{ij}]$, es la varianza de la estimación.

Asumiendo la función de enlace logarítmica y para las distribuciones paramétricas, se puede expresar el error cuadrático medio a partir de una expresión analítica:

$$MSE(\hat{c}_{ij}) \cong \emptyset \cdot \mu_{ij}^{\xi} + \hat{\mu}_{ij}^2 \cdot Var[\hat{\eta}_{ij}].$$

Esta expresión puede aplicarse para la estimación de las provisiones por año de origen, \hat{R}_i :

$$MSE(\hat{R}_i) \cong \sum_{j=k-i+1}^k \emptyset \cdot \mu_{ij}^{\xi} + \sum_{j=k-i+1}^k \mu_{ij}^2 \cdot Var[\hat{\eta}_{ij}] + 2 \cdot \sum_{\substack{j_1=k-i+1 \\ j_2=k-i+1 \\ j_2 > j_1}}^k \hat{\mu}_{ij_1} \cdot \hat{\mu}_{ij_2} \cdot Cov[\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2}]$$

donde \hat{R}_i se obtiene sumando las cuantías estimadas para cada una de las filas del rectángulo de cuantías.

Para la provisión total, \hat{R} , el error cuadrático medio para la estimación de los pagos futuros totales es:

$$MSE(\hat{R}) \cong \sum_{i=1}^k \sum_{j=k-i+1}^k \phi \cdot \mu_{ij}^{\xi} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k-i+1}^k \hat{\mu}_{ij}^2 \cdot Var[\hat{\eta}_{ij}] + 2 \\ \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j_1=k-i+1 \\ j_2=k-i+1 \\ j_2 > j_1}}^k \hat{\mu}_{ij_1} \cdot \hat{\mu}_{ij_2} \cdot Cov[\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2}].$$

A partir de las estimaciones de las cuantías futuras, se puede obtener las provisiones por año de calendario:

$$R_t = \sum_{j=t-k}^k \hat{c}_{t-j,j}.$$

siendo $t = k + 1, k + 2, \dots, 2k$.

Anteriormente, las provisiones por año de origen se han calculado sumando las cuantías estimadas de cada fila, en cambio, como se puede observar en la anterior ecuación para cada año de calendario futuro se suman las cuantías de cada contradiagonal.

El error cuadrático medio para las provisiones por año de calendario mediante la fórmula analítica se obtiene con la siguiente expresión (ver Boj y Costa, 2017):

$$MSE(\hat{R}_t) \cong \sum_{\substack{i,j=1,\dots,k \\ i+j=t}}^k \phi \cdot \mu_{ij}^{\xi} + \sum_{i,j=1,\dots,k}^k \mu_{ij}^2 \cdot Var[\eta_{ij}] + 2 \\ \cdot \sum_{\substack{i_1,i_2,j_1,j_2=1,\dots,k \\ i_1+j_1>k, i_2+j_2>k \\ i_1j_1 \neq i_2j_2}}^k \hat{\mu}_{ij_1} \cdot \hat{\mu}_{ij_2} \cdot Cov[\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2}].$$

En la expresión del error cuadrático medio la varianza de la estimación también puede obtenerse mediante la aplicación de la metodología *bootstrap*.

Además, con *bootstrapping* también se puede obtener la distribución predictiva de los pagos futuros individuales, por año de origen, por año de calendario y totales.

El primer paso para aplicar la metodología *bootstrap* es el cálculo de los residuos de Pearson para cada cuantía estimada de los datos de partida:

$$r_{ij}^P = \frac{c_{ij} - \hat{c}_{ij}}{\sqrt{\hat{c}_{ij}^{\xi}}}.$$

Los residuos se remuestran B veces y a partir de la fórmula anterior se construyen B nuevas muestras de triángulos de cuantías no acumuladas:

$$c_{ij}^* = r_{ij}^{P*} (\hat{c}_{ij}^\xi)^{\frac{1}{2}} + \hat{c}_{ij}$$

y a dichas muestras se aplica el modelo lineal generalizado.

De esta manera se obtiene la distribución predictiva para cada cuantía, para las provisiones por año de origen, para las provisiones por año de calendario y totales.

Se calcula el error estándar de la distribución predictiva y se utiliza el cuadrado del error estándar como varianza de estimación para deducir el error de predicción.

El error de predicción para cada estimación de los pagos futuros tiene la siguiente expresión:

$$PE(c_{ij}) \cong \sqrt{\emptyset^P \cdot \hat{c}_{ij}^\xi + \frac{n}{n-p} \cdot (SE_{boot}(c_{ij}))^2}$$

siendo,

- SE_{boot} : error estándar de la distribución.
- $n - p$: número de grados de libertad.
- $p = 2k + 1$.
- k : número de parámetros.

El error de predicción para la estimación de los pagos futuros por año de origen es:

$$PE(R_i) \cong \sqrt{\hat{\emptyset}^P \cdot \hat{R}_i + \frac{n}{n-p} \cdot (SE_{boot}(R_i))^2}.$$

El error de predicción para la estimación de los pagos futuros totales es:

$$PE(R) \cong \sqrt{\hat{\emptyset}^P \cdot \hat{R} + \frac{n}{n-p} \cdot (SE_{boot}(R_i))^2}.$$

El error de predicción para la estimación de los pagos futuros por año de calendario se obtiene con la siguiente expresión:

$$PE(R_t) \cong \sqrt{\emptyset \cdot \hat{R}_t + \frac{n}{n-p} \cdot (SE_{boot}(R_t))^2}.$$

4.2. Errores de predicción en el modelo de Mack

Cuando las provisiones se calculan como suma aritmética de los pagos futuros sin considerar la rentabilidad de las provisiones, se puede calcular el error cuadrático medio de las provisiones por año de origen, $MSE(\hat{R}_i)$:

$$MSE(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,k}^2 \cdot \sum_{s=k-i}^{k-1} \frac{\hat{\sigma}_s^2}{\hat{m}_s^2} \cdot \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,s}} + \frac{1}{\sum_{q=0}^{k-s} \hat{C}_{q,s}} \right).$$

En el caso que tampoco se considere la rentabilidad de las provisiones en el cálculo de estas últimas, se puede estimar el error cuadrático medio de las provisiones totales $MSE(\hat{R})$:

$$MSE(\hat{R}) = \sum_{i=1}^k \left\{ (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,k} \cdot \left(\sum_{j=i+1}^k \hat{C}_{j,k} \right) \cdot \sum_{h=k-i}^{k-1} \frac{2 \cdot \hat{\sigma}_h^2 / \hat{m}_h^2}{\sum_{n=0}^{k-h} \hat{C}_{n,h}} \right\}.$$

El paquete Chain-Ladder (Gesmann et al., 2017) del programa R (R Development Core Team, 2021) contiene una función llamada *mch* que realiza las estimaciones relativas al modelo de Mack.

En la variable *FullTriangle* se facilita el rectángulo de las cuantías acumuladas con las estimaciones, que como ya se ha comentado son las mismas que el modelo Chain-Ladder. En la variable *Mack.S.E.*, se incluye el error estándar de la variabilidad total de la proyección de las pérdidas futuras. Su cuadrado es igual a la suma de las variables $(Mack.S.E.)^2 = (Mack.ProcessRisk)^2 + (Mack.ParameterRisk)^2$, que incluyen las variabilidades no explicada y explicada de los estimadores, respectivamente.

Para calcular los errores por año de calendario para el modelo Mack, se desacumulan estos valores de la variabilidad de la proyección de pérdidas futuras, se realiza la raíz cuadrada y se suman las contradiagonales. Con los errores, que pueden ser por año de origen, por año de calendario o total se calculan los correspondientes coeficientes de variación en la aplicación práctica dividiendo por los correspondientes valores de las estimaciones de las pérdidas futuras.

4.3. Error en la estimación de los datos originales del triángulo de desarrollo

Como se ha observado a lo largo del trabajo se pueden hacer estimaciones de las provisiones técnicas a partir de distintos parámetros, según el modelo que se escoja. Con dichos parámetros, se pueden estimar los datos de partida.

El cálculo del error cuadrático medio de los datos reales (EQMDR) calcula el error de las predicciones de los datos reales. La expresión que permite calcular el EQMDR es la siguiente:

$$EQMDR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (c_{ij} - \hat{c}_{ij})^2}{N}}$$

siendo N el número de observaciones.

En nuestro caso práctico, en los datos MW2008, el número de observaciones será de 45. Para todos los modelos deterministas y estocásticos el error de las predicciones será igual a la raíz de la suma de las diferencias entre el valor observado y el valor estimado de las distintas observaciones al cuadrado dividido por el número de observaciones.

En los modelos donde las estimaciones de los datos reales sean cuantías acumuladas se desacumularán.

4.4. El resultado de desarrollo de las reclamaciones (CDR)

En el punto 3 de este trabajo se han explicado los distintos modelos y, en algunos de ellos, cómo se predecían las cuantías acumuladas pagadas. En el siguiente punto, también se han comentado los diferentes errores cuadráticos medios que principalmente predicen la incertidumbre total a largo plazo, en nuestro caso hasta k . El resultado de desarrollo de las reclamaciones (CRD), predice la incertidumbre a corto plazo.

“Supongamos que hemos estimado la cuantía acumulada de un año de origen concreto y un año de desarrollo concreto con datos hasta el tiempo t , $\hat{C}_{i,j}^{(t)}$, y, que realizamos la misma operación, pero ahora con datos hasta el tiempo $t + 1$, $\hat{C}_{i,j}^{(t+1)}$, entonces el CDR será igual a la siguiente diferencia:

$$CDR_{i,t+1} = \hat{C}_{i,j}^{(t)} - \hat{C}_{i,j}^{(t+1)},,$$

El CDR predice el error que se produce al estimar los pagos futuros de un año a otro. En los modelos estocásticos se calculará para el método Mack y para el modelo lineal generalizado tanto para Gamma como para Poisson, en el caso de *bootstrap*. Actualmente, en el programa R existe una función en el paquete ChainLadder que permite calcular el CDR para los modelos estocásticos. En el punto siguiente del trabajo se calculará el CDR de los modelos comentados anteriormente.

⁷ Basado en el ejemplo de *Claims run-off uncertainty: the full picture* de Merz y Wüthrich (2008).

5. CASO PRÁCTICO

Para el caso práctico usaremos el triángulo acumulativo propuesto por Merz y Wüthrich (2008) llamado MW2008. El triángulo recoge las cuantías acumuladas pagadas de accidentes durante 9 años respecto de los accidentes ocurridos en el año de origen.

Para realizar los cálculos se ha utilizado el programa R y los siguientes workspaces, funciones o paquetes:

- ChainLadder: este paquete se ha utilizado para la parte práctica de los modelos estocásticos. Permite calcular el triángulo de cuantías acumuladas y desacumuladas y el CDR, entre otros (Gesmann et al., 2017).
- provio: es un workspace que permite calcular las cuantías futuras estimadas de los métodos deterministas (Claramunt et al., 2017).
- glmProvision: función que permite calcular las provisiones por año de calendario para el modelo lineal generalizado y los errores de predicción con fórmula y *bootstrap*, tanto para Gamma como para Poisson con link logarítmico (ver Anexo).

5.1. Triángulos de cuantías

El triángulo acumulado es el siguiente:

Gráfico 7: Gráfico del triángulo de las cuantías acumuladas pagadas de MW2008

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825		
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422			
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812				
5	2290664	3338197	3550332	3641036					
6	2148216	3219775	3428335						
7	2143728	3158581							

8	2144738	
---	---------	--

Y el triángulo sin acumular es el siguiente:

Gráfico 8: Gráfico del triángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008

j i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832		
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719			
4	2140328	1016751	242183	101258	85292				
5	2290664	1047533	212135	90704					
6	2148216	1071559	208560						
7	2143728	1014853							
8	2144738								

5.2. Aplicación de las metodologías

5.2.1. Modelo Chain-Ladder

Los factores de desarrollo son los siguientes:

$$\hat{m}_h = (1.475928, 1.071902, 1.023150, 1.016131, \\ 1.006295, 1.005591, 1.001274, 1.001122)$$

El rectángulo con las cuantías acumuladas es el siguiente:

Gráfico 9: Gráfico del rectángulo de las cuantías acumuladas pagadas de MW2008 para el método Chain-Ladder

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	3906803
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825	3903793	3908172
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422	3568259	3572806	3576814
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812	3608384	3628557	3633180	3637256
5	2290664	3338197	3550332	3641036	3699768	3723057	3743871	3748642	3752847
6	2148216	3219775	3428335	3507703	3564284	3586720	3606772	3611368	3615419
7	2143728	3158581	3385688	3464069	3519946	3542103	3561906	3566444	3570445
8	2144738	3165479	3393083	3471634	3527634	3549839	3569685	3574233	3578243

El rectángulo con las cuantías no acumuladas es el siguiente:

Gráfico 10: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008 para el método Chain-Ladder

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	4377.670
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832	4968.272	4379.205
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719	19837.46	4547.031	4007.910
4	2140328	1016751	242183	101258	85292	22571.84	20172.68	4623.869	4075.636

5	2290664	1047533	212135	90704	58732.22	23289.16	20813.76	4770.814	4205.159
6	2148216	1071559	208560	79367.54	56581.47	22436.32	20051.57	4596.109	4051.167
7	2143728	1014853	227107.3	78380.25	55877.63	22157.23	19802.14	4538.936	4000.773
8	2144738	1020741	227603.3	78551.43	55999.06	22205.62	19845.39	4548.848	4009.511

El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal del rectángulo de las cuantías no acumuladas es el siguiente:

$$vpf = (1437703.561, 414953.074, 186310.919, 10754.908, 50809.023, \\ 28435.490, 8549.621, 4009.511)$$

Los pagos futuros totales son la suma de todas las cuantías no acumuladas de la contradiagonal del rectángulo. El pago futuro total en el método Chain-Ladder es de 2237826.

$$ETTI = (-0.00555, -0.00525, -0.00455, -0.00386, -0.00306, -0.00226, \\ -0.00149, -0.00068)$$

Si se tiene en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa (EIOPA, 2019) y se calcula el valor actual de la renta vencida del vector de pagos futuros, el vector de los pagos futuros actualizados es el siguiente:

$$vpf = (1441711.733, 418242.889, 188447.359, 108513.938, \\ 51514.610, 28791.560, 8632.890, 4030.018)$$

y la provisión total es de 2249885.

La desviación total hasta la fecha es la desviación total del rectángulo de los pagos futuros, se obtiene dividiendo la última contradiagonal de las cuantías acumuladas entre la cuantía acumulada de la última columna de todos los años de origen. La desviación total hasta la fecha para el modelo Chain-Ladder es de 93.3%.

El EQMDR del método Chain-Ladder es de 76563.62.

5.2.2. Variantes del modelo Chain-Ladder

Primera variante del modelo Chain-Ladder

El rectángulo acumulado es el siguiente:

Gráfico 11: Gráfico del rectángulo de las cuantías acumuladas pagadas de MW2008 para la primera variante del modelo Chain-Ladder

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	3906803
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825	3903819	3908198
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422	3562747	3567311	3571313
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812	3619066	3630826	3635476	3639555
5	2290664	3338197	3550332	3641036	3714884	3753659	3762899	3767719	3771945
6	2148216	3219775	3428335	3577258	3603456	3645263	3651364	3656041	3660143
7	2143728	3158581	3361867	3464260	3543672	3588911	3592091	3596692	3600726
8	2144738	3166533	3364294	3472152	3556331	3605870	3606225	3410844	3614894

Y el rectángulo sin acumular es el siguiente:

Gráfico 12: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008 para la primera variante del modelo Chain-Ladder

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	4377.670
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832	4994.007	4379.234
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719	14325.2614	4563.525	4001.745

4	2140328	1016751	242183	101258	85292	33254.21	11759.5058	4650.727	4078.212
5	2290664	1047533	212135	90704	73847.59	38775.43	9239.8624	4819.9	4226.559
6	2148216	1071559	208560	98922.82	76198.18	41806.89	6101.4502	4677.035	4101.281
7	2143728	1014853	203286.4	102392.66	79412.3	45238.22	3179.9311	4601.111	4034.704
8	2144738	1021795	197760.8	107858.16	84178.68	49539.48	354.4015	4619.215	4050.579

Finalmente, el vector de los pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (1454802.917, 435829.373, 246969.688, 13316.460, 61623.008, 9056.794, \\ 8653.919, 4959.579)$$

La suma de los pagos futuros es de 2365403.

Si se tiene en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa el vector de los pagos futuros actualizados es el siguiente:

$$vpf = (1458858.761, 439284.699, 249801.708, 146384.684, \\ 62478.770, 9170.203, 8738.203, 4071.297)$$

La suma de todos ellos, es decir la provisión total, es de 2378788.

La desviación total hasta la fecha para la primera variante del modelo Chain-Ladder es de 92.9%.

En este caso el EQMDR es igual a 74166.15.

Segunda variante suponiendo $w_{ij} = i + j + 1$ del modelo Chain-Ladder

El rectángulo acumulado es el siguiente:

Gráfico 13: Gráfico del rectángulo de las cuantías acumuladas pagadas de MW2008 para la segunda variante del modelo Chain-Ladder

<div><div><div><div><div></div><div>j</div></div></div><div><div>i</div><div></div></div></div></div>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633

1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	3906803
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825	3903762	3908142
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422	3568072	3572590	3576598
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812	3609434	3629421	3634018	3638094
5	2290664	3338197	3550332	3641036	3702061	3726449	3747084	3751829	3756038
6	2148216	3219775	3428335	3510942	3569786	3593302	3613201	3617776	3621835
7	2143728	3158581	3381138	3462608	3520642	3543835	3563459	3567972	3571974
8	2144738	3165481	3388524	3470172	3528333	3551576	3571243	3575766	3579777

Y el rectángulo sin acumular es el siguiente:

Gráfico 14: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008 para la segunda variante del modelo Chain-Ladder

<div><div><div><div><div></div></div></div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div><div></div></div></div><div><div><div></div></div></div></div><div><div><div></div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div> <div><div><div></div></div></div>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	4377.670
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832	4937.379	
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719	19649.64	4518.521	4007.667
4	2140328	1016751	242183	101258	85292	23621.93	19987.5	4596.213	4076.575
5	2290664	1047533	212135	90704	61024.91	24387.73	20635.48	4745.218	4208.734
6	2148216	1071559	208560	82606.6	58844.49	23516.36	19898.17	4575.671	4058.356

7	2143728	1014853	222557.5	81469.38	58034.40	23192.62	19624.24	4512.679	4002.486
8	2144738	1020743	223043.6	81647.35	58161.17	23243.28	19667.11	4522.537	4011.229

Finalmente, el vector de los pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (1439518.288, 416630.425, 192437.465, 110073.756, \\ 51651.930, 28238.146, 8525.023, 4011.229)$$

La suma de los pagos futuros es de 2251086.

Si se tiene en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa el vector de los pagos futuros actualizados es el siguiente:

$$vpf = (1443531.519, 419933.538, 194644.159, 111573.929, \\ 52369.223, 28591.745, 8608.052, 4031.746)$$

La suma de todos ellos, es decir la provisión total, es de 2263284.

La desviación total hasta la fecha para la segunda variante del modelo Chain-Ladder es de 93.2%.

En este caso, el EQMDR es igual a 77058.89.

5.2.3. Mínimos cuadrados de De Vylder

El vector de cuantía total a pagar de los siniestros ocurridos en cada año de origen es el siguiente:

$$x_i = (3651617, 3968507, 3595726, 3572791, 3788998, \\ 3611601, 3571822, 3577448)$$

El vector de la proporción de la cuantía total a pagar de los siniestros ocurridos en cada año de origen que se paguen en el año de desarrollo es el siguiente:

$$p_j = (0.599516209, 0.285516364, 0.063588066, 0.02187186, 0.015477048, \\ 0.006126433, 0.00551898, 0.001255898, 0.001128815)$$

El rectángulo sin acumular con las predicciones de \hat{c}_{ij} es el siguiente:

Gráfico 15: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008 para el modelo mínimos cuadrados de De Vylder

j i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	4479.71
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832	4867.272	4374.756
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719	19844.74	4515.867	4058.91
4	2140328	1016751	242183	101258	85292	21888.46	19718.16	4487.062	4033.02
5	2290664	1047533	212135	90704	58642.5	23213.04	20911.40	4758.596	4277.078
6	2148216	1071559	208560	78993.6	55896.92	22126.23	19932.35	4535.803	4076.829
7	2143728	1014853	227125.3	78123.57	55281.27	21882.53	19712.82	4485.846	4031.927
8	2144738	1021420	227483	78246.61	55368.33	21917	19743.86	4492.911	4038.277

El vector de los pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (1437261.489, 413325.303, 185111.481, 105974.834, \\ 50442.695, 28306.540, 8524.838, 4038.277)$$

La suma de los pagos futuros es de 2232985.

Si se tiene en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa el vector de los pagos futuros actualizados es el siguiente:

$$vpf = (1441268.428, 416602.213, 187234.167, 107419.144, \\ 51143.195, 28660.995, 8607.865, 4058.932)$$

La suma de todos ellos, es decir la provisión total, es de 2244995.

La desviación total hasta la fecha para el método de los mínimos cuadrados de De Vylder es de 93.3%.

Este método tiene un EQMDR igual a 32031.78.

5.2.4. Modelo de Mack

El rectángulo de las cuantías acumuladas y des acumuladas, coincide con el modelo de Chain-Ladder.

Tabla 1: Resultados obtenidos a partir de la función MackChainLadder

Año de origen	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	Mack S.E.	CV (IBNR)
0	3678633	1.000	3678633	0	0	NaN
1	3902425	0.999	3906803	4378	1578	0.3604
2	3898825	0.998	3908172	9347	2148	0.2298
3	3548422	0.992	3576814	28392	4380	0.1543
4	3585812	0.986	3637256	51444	10628	0.2066
5	3641036	0.970	3752847	111811	30353	0.2715
6	3428335	0.948	3615419	187084	35994	0.1924
7	3158581	0.885	3670445	411864	45111	0.1095
8	2144738	0.599	3578243	1433505	69566	0.0485
TOTAL	30986807	0.933	33224633	2237826	108732	0.05

La columna *Latest* refleja la última contradiagonal de las cuantías acumuladas. La siguiente columna es la desviación hasta la fecha (*Dev. To, Date*), es decir, la desviación de cada una de las filas del rectángulo de los pagos futuros. Como podemos observar, a medida que incrementan los años de origen la desviación hacia la fecha disminuye, lo que tiene sentido, porque cuanto mayor sea el año de origen menos datos reales se tiene y más predicciones se debe realizar. La desviación total hasta la fecha es de 93,3%. La tercera columna es la llamada *Ultimate* que es la cuantía acumulada de la última columna para cada año de origen. La cuarta columna es el IBNR, la estimación de los pagos futuros por año de origen. La penúltima columna es la denominada Mack S.E., el error de predicción. El Mack S.E. aumenta a medida que se incrementa el año de origen. En el modelo de Mack el error de predicción total es de 108732. Finalmente, la última columna es el CV (IBNR), que es el coeficiente de variación. Se obtiene dividiendo el Mack S.E. entre el IBNR y representa el error que se está cometiendo sobre el importe total que se ha estimado. En el modelo de Mack el coeficiente de variación es del 5%.

Tabla 2: Resultados obtenidos a partir de la función CDR

Año de origen	IBNR	CDR (1) S.E	Mack S.E.
0	0.000	0.000	0.000
1	4378	1578	1578
2	9347	1669	2148
3	28392	3984	4380
4	51444	9748	10628
5	111811	28452	30353
6	187084	20966	35994
7	411864	28128	45111
8	1433505	53325	69566
TOTAL	2237826	81337	108732

La primera columna es el IBNR y es la estimación de los pagos futuros por año de origen. La segunda columna es la denominada CDR (1) S.E., es el error de predicción con la metodología CDR. Finalmente, la última columna es el Mack S.E., el error de predicción, que coincide con el resultado de la tabla anterior.

Los factores de desarrollo en el modelo de Mack coinciden con los del modelo Chain-Ladder, por lo tanto, ambos modelos tendrán el mismo EQMDR, es decir, 76563.62.

El vector de los pagos futuros actualizados teniendo en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa del modelo de Mack coincide con el del modelo Chain-Ladder y, por lo tanto, la provisión total, es de 2249885.

Los resultados de los errores de predicción por año de calendario son los siguientes:

Tabla 3: Errores de predicción por año de calendario

Año	IBNR	P.E.	C.V.
9	1437704	64457	0.0448
10	414953	18730	0.0451
11	186311	11241	0.0603
12	107055	6859.548	0.0641

13	50809	1176	0.0231
14	28435	507	0.0178
15	8550	129	0.0151
16	4010	95	0.0238

La columna IBNR es la estimación de los pagos futuros por año de calendario. La segunda columna es la denominada P.E., que es el error de predicción. Finalmente, la última columna es el coeficiente de variación, que se obtiene dividiendo el error de predicción entre el IBNR y representa el error que se está cometiendo sobre el importe total que se ha estimado para cada año de calendario. Cabe destacar que se tendrá en cuenta el primer año calendario estimado, es decir el año 9, que es al año de calendario siguiente al del cálculo de la reserva. En este año se estima el mayor número de cuantías dentro del vector de pagos futuros. Es por ello que, en general, el error del primer año suele ser el mayor. Cuando dentro de un año se disponga de los nuevos datos observados y se realicen las predicciones para calcular las provisiones se volverán a estimar los importes de todos los años de calendario excepto del año 9, por lo tanto, es de interés analizar el error de predicción cometido para estos importes. En el modelo de Mack el coeficiente de variación del año de calendario 9 es de 4.48%.

5.2.5. Modelo lineal generalizado

Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico con fórmula

El rectángulo acumulado, el rectángulo sin acumular y el vector de los pagos futuros son los mismos que en el método Chain-Ladder.

Tabla 4: Resultados obtenidos a partir de la función glmReserve

Año de origen	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S.E.	CV
1	3902425	0.999	3906803	4378	5671	1.295
2	3898825	0.998	3908172	9347	7685	0.822
3	3548422	0.991	3576814	28392	12066	0.425
4	3585812	0.983	3637256	51444	15835	0.308
5	3641036	0.970	3752847	111811	22873	0.205
6	3428335	0.950	3615419	187084	29265	0.156

7	3158581	0.886	3570445	411864	44037	0.107
8	2144738	0.600	3578243	1433505	98088	0.0684
TOTAL	27308174	0.924	29546000	2237826	129305	0.0578

La desviación total hasta la fecha es de 92.4%. En el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico el error de predicción total obtenido con fórmula es de 129305. Finalmente, el coeficiente de variación (CV) es del 5.78%.

Tabla 5: Resultados de los errores de predicción por año de calendario a partir de la función glmProvision

Año	IBNR	P.E.	CV
9	1437704	88521	0.0616
10	414953	43092	0.1038
11	186311	28832	0.1548
12	107055	22177	0.2071
13	50809	15703	0.3091
14	28435	12081	0.4249
15	8550	7209	0.8432
16	4010	5309	1.3242

La segunda columna, P.E. es el error de predicción obtenido con fórmula para cada año de calendario. En el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico el coeficiente de variación para el año de calendario 9 es de 6.16%.

Para el Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico el EQMDR es de 30476.75.

Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico con *Bootstrap*

El rectángulo acumulado, el rectángulo sin acumular, el vector de los pagos futuros y la suma de los pagos futuros actualizados teniendo en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa es el mismo que en el modelo Chain-Ladder.

Tabla 6: Resultados obtenidos a partir de la función glmReserve

Año de origen	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S.E.	CV
1	3902425	0.999	3906803	4378	5328	1.217
2	3898825	0.998	3908172	9347	7456	0.798
3	3548422	0.991	3576814	28392	11641	0.401
4	3585812	0.983	3637256	51444	15333	0.298
5	3641036	0.970	3752847	111811	22518	0.201
6	3428335	0.950	3615419	187084	28108	0.150
7	3158581	0.886	3570445	411864	41935	0.102
8	2144738	0.600	3578243	1433505	92750	0.065
TOTAL	27308174	0.924	29546000	2237826	123050	0.055

La desviación total hasta la fecha también es de 92.4%. En el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico el error de predicción total calculado con *bootstrap* es de 123050, inferior al obtenido con fórmula. Finalmente, el coeficiente de variación (CV) total es del 5.5%.

Tabla 7: Resultados obtenidos a partir de la función CDR

Año de origen	IBNR	IBNR S.E.	CDR (1) S.E.
0	0.000	0.000	0.000
1	4069	5301	5301
2	8877	7355	5540
3	28433	12237	10419
4	51705	15692	10730
5	112334	22417	15850
6	188574	28768	19025
7	415447	44987	33415
8	1434779	97522	89967

TOTAL	2244219	130854	110332
--------------	---------	--------	--------

La segunda columna, el CDR (1) S.E. es el error de predicción de la reserva con la metodología CDR. Como se puede observar el CDR (1) S.E. total es de 110332.

Tabla 8: Resultados de los errores de predicción por año de calendario a partir de la función glmProvision

Año	IBNR	IBNR. mean	P.E.	CV
9	1437704	1439696	87634	0.0610
10	414953	416546	42949	0.1035
11	186311	187461	28700	0.1540
12	107055	108142	22005	0.2056
13	50809	51710	15292	0.3010
14	28435	28975	11729	0.4124
15	8550	8953	6750	0.7895
16	4010	4166	4829	1.2044

En el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico el coeficiente de variación del año 9 obtenido con *bootstrap* es del 6.10%.

En este caso el EQMDR coincide con el obtenido en el modelo Poisson logarítmica con los errores calculados con fórmula, ya que los coeficientes para estimar las cuantías observadas son los mismos, por lo tanto, el EQMDR es igual a 30476.75.

Modelo lineal generalizado Gamma con fórmula

El rectángulo acumulado es el siguiente:

Gráfico 16: Gráfico del rectángulo de las cuantías acumuladas pagadas de MW2008 para el Modelo lineal generalizado Gamma con fórmula

j i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633

1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	3905610
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825	3904218	3908311
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422	3570321	3575445	3579334
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812	3612538	3637441	3643268	3647691
5	2290664	3338197	3550332	3641036	3697295	3720831	3742761	3747892	3751787
6	2148216	3219775	3428335	3504294	3557200	3579333	3599956	3604782	3608445
7	2143728	3158581	3383735	3460100	3513289	3535541	3556275	3561126	3564808
8	2144738	3168324	3394496	3471207	3524637	3546989	3567816	3572689	3576388

Y el rectángulo sin acumular es el siguiente:

Gráfico 17: Gráfico del rectángulo de las cuantías no acumuladas pagadas de MW2008 para el Modelo lineal generalizado Gamma con fórmula

<div><div><div><div><div></div></div></div><div><div><div></div></div><div><div><i>j</i></div></div></div><div><div><div></div></div><div><div><i>i</i></div></div></div></div></div>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
1	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	3185
2	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832	5393	
3	2171487	993787	230567	70612	49250	32719	21899	5124	
4	2140328	1016751	242183	101258	85292	26726	24903	5827	
5	2290664	1047533	212135	90704	56259	23536	21930	5131	
6	2148216	1071559	208560	75959	52906	22133	20623	4826	3663

7	2143728	1014853	225154	76365	53189	22252	20734	4851	3682
8	2144738	1023586	226172	76711	53430	22352	20827	4873	3699

El vector de los pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (1438161, 413099, 183679, 105859, 51807, 29341, 8555, 3699)$$

La suma de los pagos futuros es de 2234200.

Si se tiene en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa, es decir, la suma de cada contradiagonal del rectángulo de las cuantías no acumuladas actualizadas, el resultado es el siguiente:

$$vpf = (1442170.447, 416374.116, 185785.260, 107301.731, \\ 52526.446, 29708.409, 8638.321, 3717.920)$$

La suma de todos ellos, es decir la provisión total, es de 2246223.

Tabla 9: Resultados obtenidos a partir de la función glmReserve

Año de origen	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S.E.	CV
1	3902425	0.999	3905610	3185	972	0.305
2	3898825	0.998	3908312	9487	2009	0.212
3	3548422	0.991	3579335	30913	6188	0.200
4	3585812	0.983	3647691	61879	10746	0.174
5	3641036	0.970	3751787	110751	19230	0.174
6	3428335	0.950	3608446	180111	31582	0.175
7	3158581	0.886	3564809	406228	82443	0.203
8	2144738	0.600	3576389	1431651	383823	0.268
TOTAL	27308174	0.924	29542378	2234204	398398	0.178

La desviación total hasta la fecha es de 92.4%, idéntico al modelo lineal generalizado Poisson y enlace logarítmico. En el modelo lineal generalizado Gamma el error de

predicción total obtenido con fórmula es de 398398. Finalmente, el coeficiente de variación total (CV) es del 17.8%.

Tabla 10: Resultados de los errores de predicción por año de calendario a partir de la función glmProvision

Año	IBNR	P.E.	CV
9	1438162	319215	0.2220
10	413100	75106	0.1818
11	183680	29878	0.1627
12	105859	19270	0.1820
13	51806	9702	0.1873
14	28342	7084	0.2414
15	8556	2091	0.2444
16	3699	1359	0.3675

En el modelo lineal generalizado Gamma el coeficiente de variación del año de calendario⁹ es de 22.20%.

En este caso el EQMDR es igual a 46169.1.

Modelo lineal generalizado Gamma con *bootstrap*

El rectángulo acumulado, el rectángulo sin acumular, el vector de los pagos futuros y la suma de los pagos futuros actualizados teniendo en cuenta la ETTI de abril 2021 de Europa son los mismos que el del modelo lineal generalizado Gamma con fórmula.

Tabla 11: Resultados obtenidos a partir de la función glmReserve

Año de origen	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S.E.	CV
1	3902425	0.999	3905610	3185	992	0.311
2	3898825	0.998	3908312	9487	2102	0.222
3	3548422	0.991	3579335	30913	6393	0.207
4	3585812	0.983	3647691	61879	11589	0.187

5	3641036	0.970	3751787	110751	19223	0.174
6	3428335	0.950	3608446	180111	31894	0.177
7	3158581	0.886	3564809	406228	83489	0.206
8	2144738	0.600	3576389	1431651	408057	0.285
TOTAL	27308174	0.924	29542378	2234204	423710	0.190

La desviación total hasta la fecha es de 92.4%, idéntico al modelo lineal generalizado Poisson y al modelo lineal generalizado Gamma con fórmula. En el modelo lineal generalizado Gamma el error de predicción total obtenido con *bootstrap* es de 423710, superior al del modelo lineal generalizado Gamma calculado con fórmula. Finalmente, el coeficiente de variación total (CV) es del 19%.

Tabla 12: Resultados obtenidos a partir de la función CDR

Año de origen	IBNR	IBNR S.E.	CDR (1) S.E.
0	0.000	0.000	0.000
1	4359	5893	5893
2	9586	8112	6048
3	29358	12746	10573
4	51441	16317	11167
5	111936	22415	16122
6	187686	29854	20234
7	411624	44422	33296
8	1434005	100250	87967
TOTAL	2239997	132241	107546

El CDR (1) S.E. total es de 107546.

Tabla 13: Resultados de los errores de predicción por año de calendario a partir de la función glmProvision

Año	IBNR	IBNR mean	P.E.	CV
------------	-------------	------------------	-------------	-----------

9	1438162	1438168	214294	0.1490
10	413100	413102	50268	0.1217
11	183680	183682	20080	0.1093
12	105859	105861	12581	0.1188
13	51806	51808	6332	0.1222
14	28342	29343	4416	0.1505
15	8556	8557	1243	0.1453
16	3699	3699	753	0.2036

En el modelo lineal generalizado Gamma el coeficiente de variación del año de calendario 9 obtenido con *bootstrap* es del 14.90%.

En este caso el EQMDR coincide con el obtenido en el modelo Gamma con los errores calculados con fórmula, ya que los coeficientes para estimar las cuantías observadas son los mismos, por lo tanto, el EQMDR es igual a 46169.1.

5.3. Análisis de selección de triángulos

Se pueden resumir los resultados obtenidos en el punto 5.2. en la siguiente tabla:

Tabla 14: Resumen de los resultados obtenidos de la provisión total, el coeficiente de variación total, el error de predicción CDR, la desviación total hasta la fecha y los errores cuadráticos medios de los datos observados.

	Pagos futuros	Provisión total con ETTI	CV total	CDR (1) S.E.	Desviación total hasta la fecha	EQMDR
Modelo Chain- Ladder	2237826	2249885	X	X	93.3%	76563.62
Primera variante de Chain- Ladder	2365403	2378788	X	X	92.9%	74166.15
Segunda variante de	2251086	2263284	X	X	93.2%	77058.89

Chain-Ladder						
Mínimos cuadrados de De Vylder	2232985	2244995	X	X	93.3%	32031.78
Modelo Mack	2237826	2249885	5%	81337	93.3%	76563.62
Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico con fórmula	2237826	2249885	5.78%	X	92.4%	30476.75
Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico con <i>bootstap</i>	2237826	2249885	5.5%	110332.371	92.4%	30476.75
Modelo lineal generalizado gamma con fórmula	2234200	2246223	17.8%	X	92.4%	46169.1
Modelo lineal generalizado gamma con <i>bootstap</i>	2234200	2246223	19%	107546.109	92.4%	46169.1

De los criterios considerados hay algunos que permiten elegir a la entidad aseguradora o reaseguradora entre todos los modelos expuestos, tanto deterministas como estocásticos: la provisión total, la desviación total hasta la fecha y el EQMDR.

En el caso de que la aseguradora o reaseguradora sea adversa al riesgo, si tiene en cuenta la provisión total escogerá el importe más elevado, en este caso corresponde al modelo de la primera variante de Chain-Ladder. En cambio, si el asegurador o reasegurador no es adverso al riesgo, preferirá escoger el modelo que predice una menor provisión total, en este caso escogerá el modelo de los mínimos cuadrados de De Vylder.

Cuando se tenga solo en cuenta la desviación total hasta la fecha el modelo Chain-Ladder, el modelo de los mínimos cuadrados de De Vylder o el modelo de Mack proporcionan los resultados más altos.

Si la entidad aseguradora o reaseguradora elige un modelo que tenga en cuenta principalmente la mejor estimación de los datos observados del triángulo de cuantías pagadas, analizando los errores cuadráticos medios de los datos reales, escogerá el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico ya que es el que tiene un EQMDR inferior, que significa que es el modelo que mejor ajusta los datos reales. Aunque este no tiene porqué ser un buen criterio en general para las predicciones futuras, pues los métodos que ajustan con tantos parámetros a veces pueden realizar estimaciones demasiado ajustadas según el patrón de los datos originales.

Para el resto de los criterios el asegurador o reasegurador podrá elegir entre los distintos modelos estocásticos aplicados en el cálculo de las provisiones.

Cuando solo se tenga en cuenta el coeficiente de variación total, es decir, el error de predicción cometido en relación con la provisión total, se escogerá el modelo de Mack para hacer las predicciones, ya que obtiene el valor más pequeño. En este caso se estará considerando la incertidumbre total a largo plazo.

En el caso de que la entidad aseguradora o reaseguradora tenga en cuenta la incertidumbre a corto plazo, analizando el error de predicción del CDR escogerá también el modelo de Mack para hacer sus predicciones.

Respecto a los resultados sobre las provisiones por año de calendario, para el año siguiente al del cálculo de la reserva, se pueden resumir en la siguiente tabla:

Tabla 15: Resumen de los resultados obtenidos para el año de calendario 9

	IBNR del año de calendario 9	CV del año de calendario 9
Modelo de Mack	1437704	4.48%
Modelo lineal generalizado Poisson logarítmico fórmula	1437703	6.16%
Modelo lineal generalizado Poisson	1437703	6.10%

logarítmico bootstrap		
Modelo lineal generalizado gamma fórmula	1438162	22.20%
Modelo lineal generalizado gamma bootstrap	1438162	14.90%

En este caso tanto el modelo de Mack como el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico estiman el mismo importe a pagar para el año 9 pero los errores de predicción se calculan de manera diferente, debido a las hipótesis distintas que se tienen en cuenta en estos modelos. En el modelo de Mack se obtiene un coeficiente de variación más pequeño que en el resto de los modelos.

Analizando los coeficientes de variación de cada año de calendario futuro, según las Tablas 3, 5, 8, 10, 13 y 15, pueden hacerse las siguientes observaciones:

- El modelo de Mack es el que tiene unos coeficientes de variación más pequeños en todos los años de calendario en comparación con los otros modelos.
- Para el último año de calendario se obtiene un mayor coeficiente de variación para todos los modelos, excepto para el modelo de Mack, en el que el año de calendario 12 es el que tiene coeficiente de variación mayor.
- El modelo lineal generalizado Gamma logarítmico con fórmula es el que tiene unos coeficientes de variación mayores para los primeros años de calendario, en cambio, el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico con fórmula es el que tiene unos coeficientes de variación mayores para los últimos años de calendario.

De los modelos estocásticos el que mejor predice las provisiones técnicas futuras es el modelo de Mack ya que tiene el coeficiente de variación menor, tanto para la provisión total como para los años de calendario y también tiene una de las mayores desviaciones totales hasta la fecha.

En conjunto, para todos los métodos tanto deterministas como estocásticos, las estimaciones más prudentes y arriesgadas corresponderían a los modelos deterministas de la primera variante de Chain-Ladder y mínimos cuadrados de De Vylder, respectivamente, mientras que los modelos estocásticos obtienen unos valores intermedios para las provisiones.

Si se debiese escoger entre un modelo determinista y el modelo de Mack se escogería este último, cabe recordar que en el caso de los modelos estocásticos se pueden obtener los

errores cometidos en la predicción, y, por tanto, se dispone de más información para la selección del modelo adecuado.

El modelo de Mack es un modelo de distribución libre, es decir, no asume ninguna distribución para las cuantías pagadas, mientras que en el caso del modelo lineal generalizado se ha considerado que las cuantías pueden tener una distribución del error Poisson o Gamma. El modelo lineal generalizado con distribución Poisson obtiene las mismas estimaciones de las cuantías futuras que el modelo de Mack y que el modelo determinista Chain-Ladder.

Comparando los errores de predicción en los modelos lineales generalizados se puede observar que para la distribución Poisson se obtienen unos coeficientes de variación para la provisión total muy cercanos al modelo de Mack e inferiores a los de la distribución Gamma, tanto si se han calculado con fórmula como mediante *bootstrap*. Por lo tanto, se puede considerar que la distribución que mejor se ajusta es la de Poisson.

Por todo ello, si la entidad aseguradora decide elegir un modelo determinista para el cálculo de las provisiones, para estos datos el modelo más adecuado podría ser el Chain-Ladder, ya que el importe de la provisión total coincidiría con el obtenido tanto para el modelo de Mack como para el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico y se ha constatado que los errores de predicción que muestran estos modelos estocásticos son los más pequeños.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo ha permitido obtener una visión amplia sobre las provisiones técnicas y cómo predecirlas con distintos modelos.

En la primera parte se han comentado las principales normativas que regulan las provisiones técnicas, principalmente las de no vida. Se ha podido observar la gran importancia de Solvencia II en su valoración.

Este trabajo se ha centrado en la explicación de algunos modelos deterministas y estocásticos utilizados en las entidades aseguradoras y reaseguradoras para el cálculo de las provisiones.

Se han explicado distintas metodologías utilizadas en el ámbito actuarial y que no se han estudiado en profundidad en el máster, como el CDR o los errores de predicción por año de calendario. También se han propuesto medidas que se pueden calcular tanto para los métodos deterministas como para los estocásticos, como los errores cuadráticos medios de los datos reales. Estos criterios, además, han permitido determinar cuál es el modelo más idóneo para hacer las predicciones de las provisiones técnicas futuras en la toma de decisiones para el asegurador.

El caso práctico se ha realizado a partir de los datos MW2008. En los modelos estocásticos se pueden obtener los errores cometidos en la predicción, y, por tanto, se dispone de más información para la selección del modelo adecuado, ya que en los modelos deterministas no se pueden obtener. De los modelos estocásticos el que mejor predice las cuantías futuras es el modelo de Mack ya que tiene el coeficiente de variación menor, tanto para la provisión total como para los años de calendario y también tiene una desviación total hasta la fecha mayor. Además, es el que tiene un coeficiente de variación calculado a partir del CDR menor.

Si la entidad aseguradora o reaseguradora decide elegir un modelo determinista para el cálculo de las provisiones, para los datos MW2008 el modelo más adecuado es el método Chain-Ladder, ya que el importe de la provisión total coincidiría con el obtenido en el modelo de Mack y, como se ha comentado, los errores de predicción que muestra este modelo estocástico son los más pequeños.

Según los criterios que consideren más relevantes las entidades aseguradoras y/o reaseguradoras escogerán un modelo u otro, pero se puede afirmar que para los datos MW2008 el modelo determinista que mejor se ajusta es el modelo Chain-Ladder. En cambio, el modelo estocástico que mejor predice las cuantías futuras es el modelo de Mack, aunque si se priorizan los errores en la estimación de los datos originales del triángulo de desarrollo escogerían el modelo lineal generalizado Poisson logarítmico, que obtiene la misma provisión total que el método Chain-Ladder y el modelo de Mack.

6. BIBLIOGRAFÍA

Berquist, J.R., Sherman, R.E. (1977). *Loss reserve adequacy testing: a comprehensive systematic approach*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 64, 123–185.

Boj, E., Costa, T. (2014). *Modelo lineal generalizado y cálculo de la provisión técnica*. Depósito digital de la Universidad de Barcelona (España). Colección de objetos y materiales docentes (OMADO). <http://hdl.handle.net/2445/49068>

Boj, E., Costa, T., Espejo, J. (2014). Provisiones técnicas por años de calendario mediante el modelo lineal generalizado. Una aplicación con RExcel. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 20, 83-116.

Boj, E., Costa, T. (2017). Provisions for claims outstanding, incurred but not reported, with generalized linear models: prediction error formulated according to calendar year. *Cuadernos de Gestión*, 17(2), 157–174

Boj, E., Claramunt, M.M., Costa, T. (2020). *Tarifificación y provisiones (tercera edición)*. Depósito digital de la Universidad de Barcelona (España). Colección de objetos y materiales docentes (OMADO). <http://hdl.handle.net/2445/149241>

Boletín Oficial del Estado (2015). *Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras*. Jefatura del Estado.

Boletín Oficial del Estado (2015). *Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras*. Ministerio de Economía y Competitividad.

Claramunt, M.M., Costa, T., Boj, E. (2017). *provisio: Área de trabajo en lenguaje R para el cálculo de provisiones técnicas en seguros no de vida con métodos deterministas*. Depósito digital de la Universidad de Barcelona, colección de investigación-software. <http://hdl.handle.net/2445/106653>

Clarke, T.G. y Harland, N. (1974). A practical statistical method of estimating claims liability and claims cash Flow. *ASTIN Bulletin*, 8, 26–37.

De Vylder (1978). Estimation of IBNR claims by least squares. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 7, 249–257.

De Vylder, F.E. (1986). *Advanced risk theory*. Editions de l'Université de Bruxelles, Swiss Association of Actuaries. Bruselas (Bélgica).

Diario Oficial de la Unión Europea. *Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*.

EIOPA. (2019). Risk-free interest rate term structures. http://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en

England, P.D. y Verrall, R.J. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 281–293.

England, P.D. y Verrall, R.J. (2002). *Stochastic claims reserving in general insurance (with discusión)*. British Actuarial Journal, 8, 443-544. (Inglaterra).

England, P.D. y Verrall, R.J. (2006). *Predictive Distribution of Outstanding Liabilities in General Insurance*. Annals of Actuarial Science, 1:II, 221-270.

Gesmann, M., Murphy, D., Zhang, Y., Carrato, A., Crupi, G., Dutang, Ch., Lacoume, A., Charpentier, A., Wuthrich, M. and Concina, F. (2017). *ChainLadder*. Paquete de R en Cran, versión 0.2.12, 2021. <http://cran.r-project.org/package=ChainLadder>

Kaas, R.; Goovaerts, M.; Dhaene, J.; Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory: using R. (Second edition)*. Springer-Verlag, Heidelberg (Alemania).

Kramreiter, H. y Straub, E. (1973). On the calculacation of IBNR reserves II. *Mitteilungen der Vereinigung Schewizerischer Versicherungsmathematike*, 73, 177–190.

Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimaties. *Astin Bulletin*, 23(2), 213–225.

McCullagh, P. y Nelder, J. (1989). *Generalized linear models (Segunda edición)*. Nueva York (Estados Unidos).

Merz, M. y Wüthrich, M.V. (2008). *Modelling the claims development result for solvency purposes*. Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall.

Merz, M. y Wüthrich, M.V. (2015). *Claims run-off uncertainty: the full picture*. Swiss Finance Institute Research Paper, 14–69.

R Development Core Team (2021). *R Development Core Team, R: a language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria, 2021. <http://www.R-project.org/>

Reglamentos (2015). *Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento*.

Skurnick, D. (1973). A survey of los reserving methods. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 60:113, 16–58.

Tarbell, T.F. (1934). Incurred but not reported claims reserve. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 20, 275–289.

Taylor, G.C. (1986). *Claim reserving in non-life insurance*. North Holland, Insurance Series 1 (Países Bajos).

7. ANEXO

```
C0 <-  
c(2202584,3210449,3468122,3545070,3621627,3644636,3669012,3674511,3678633)
```

```
C1 <- c(2350650,3553023,3783846,3840067,3865187,3878744,3898281,3902425)
```

```
C2 <- c(2321885,3424190,3700876,3798198,3854755,3878993,3898825)
```

```
C3 <- c(2171487,3165274,3395841,3466453,3515703,3548422)
```

```
C4 <- c(2140328,3157079,3399262,3500520,3585812)
```

```
C5 <- c(2290664,3338197,3550332,3641036)
```

```
C6 <- c(2148216,3219775,3428335)
```

```
C7 <- c(2143728,3158581)
```

```
C8 <- c(2144738)
```

```
c0<-c(C0[1],diff(C0))
```

```
c1<-c(C1[1],diff(C1[1:length(C1-1)]))
```

```
c2<-c(C2[1],diff(C2[1:length(C2-2)]))
```

```
c3<-c(C3[1],diff(C3[1:length(C3-3)]))
```

```
c4<-c(C4[1],diff(C4[1:length(C4-4)]))
```

```
c5<-c(C5[1],diff(C5[1:length(C5-5)]))
```

```
c6<-c(C6[1],diff(C6[1:length(C6-6)]))
```

```
c7<-c(C7[1],diff(C7[1:length(C7-7)]))
```

```
c8<-C8
```

#MODELO CHAIN LADDER

```
menuprovisio()
```

```
vpf <- ibnrchl(c(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8))
```

```
vpf
```

```
sum(vpf)
```

```

ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)

i.renta <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i)

}

i.renta

prov.renta <- sum(vpf*i.renta)

prov.renta

f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])

}

f.fluxe

i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))

for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)

}

i.fluxe

prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)

prov.fluxe

#errores

c01 <- (1.475928*2202584)-2202584

c11 <- (1.475928*2350650)-2350650

c21 <- (1.475928*2321885)-2321885

c31 <- (1.475928*2171487)-2171487

c41 <- (1.475928*2140328)-2140328

c51 <- (1.475928*2290664)-2290664

c61 <- (1.475928*2148216)-2148216

c71 <- (1.475928*2143728)-2143728

```



```

c02 <- (1.071902*c01)-c01
c12 <- (1.071902*c11)-c11
c22 <- (1.071902*c21)-c21
c32 <- (1.071902*c31)-c31
c42 <- (1.071902*c41)-c41
c52 <- (1.071902*c51)-c51
c62 <- (1.071902*c61)-c61
c03 <- (1.023150 *c02)-c02
c13 <- (1.023150 *c12)-c12
c23 <- (1.023150 *c22)-c22
c33 <- (1.023150 *c32)-c32
c43 <- (1.023150 *c42)-c42
c53 <- (1.023150 *c52)-c52
c04 <- (1.016131*c03)-c03
c14 <- (1.016131*c13)-c13
c24 <- (1.016131*c23)-c23
c34 <- (1.016131*c33)-c33
c44 <- (1.016131*c43)-c43
c05 <- (1.006295*c04)-c04
c15 <- (1.006295*c14)-c14
c25 <- (1.006295*c24)-c24
c35 <- (1.006295*c34)-c34
c06 <- (1.005591*c05)-c05
c16 <- (1.005591*c15)-c15
c26 <- (1.005591*c25)-c25
c07 <- (1.001274*c06)-c06
c17 <- (1.001274 *c16)-c16

```

c08 <- (1.001122*c07)-c07

e01 <- (1007865-c01)^2

e11 <- (1202373-c11)^2

e21 <- (1102305-c21)^2

e31 <- (993787-c31)^2

e41 <- (1016751-c41)^2

e51 <- (1047533-c51)^2

e61 <- (1071559-c61)^2

e71 <- (1014853-c71)^2

e02 <- (257673-c02)^2

e12 <- (230823-c12)^2

e22 <- (276686-c22)^2

e32 <- (230567-c32)^2

e42 <- (242183-c42)^2

e52 <- (212135-c52)^2

e62 <- (208560-c62)^2

e03 <- (76948-c03)^2

e13 <- (56221-c13)^2

e23 <- (97322-c23)^2

e33 <- (70612-c33)^2

e43 <- (101258-c43)^2

e53 <- (90704-c53)^2

e04 <- (76557-c04)^2

e14 <- (25120-c14)^2

e24 <- (56557-c24)^2

e34 <- (49250-c34)^2

e44 <- (85292-c44)^2

```

e05 <- (23009-c05)^2
e15 <- (13557-c15)^2
e25 <- (24238-c25)^2
e35 <- (32719-c35)^2
e06 <- (24376-c06)^2
e16 <- (19537-c16)^2
e26 <- (19832-c26)^2
e07 <- (5499-c07)^2
e17 <- (4144-c17)^2
e08 <- (4122-c08)^2

sumerrores <-
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)

errorchainladder <- sqrt(sumerrores/45);errorchainladder

#La desviación total hasta la fecha

latest <-
3678633+3902425+3898825+3548422+3585812+3641036+3428335+3158581+21447
38

ultimate <-
3678633+3906803+3908172+3576814+3637256+3752847+3615419+3570445+35782
43

desvhasfech <- latest/ultimate;desvhasfech

#Variantes del modelo Chain-Ladder

menuprovisio()

#Variante 1

vpf1 <- ibnrchlvar1(c(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8))

sum(vpf1)

```

```

ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)

i.renta <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i)

}

i.renta

prov.renta1 <- sum(vpf1*i.renta)

prov.renta1

f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])

}

f.fluxe

i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))

for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)

}

i.fluxe

prov.fluxe1 <- sum(vpf1*i.fluxe*f.fluxe)

prov.fluxe1


#errores

c01 <- (1.457583*2202584)-2202584

c11 <- (1.511507*2350650)-2350650

c21 <- (1.474746*2321885)-2321885

c31 <- (1.457653*2171487)-2171487

c41 <- (1.475044*2140328)-2140328

c51 <- (1.457305*2290664)-2290664

c61 <- (1.498813*2148216)-2148216

c71 <- (1.473406*2143728)-2143728

```

```

c02 <- (1.080261*c01)-c01
c12 <- (1.064965*c11)-c11
c22 <- (1.080803*c21)-c21
c32 <- (1.072843*c31)-c31
c42 <- (1.076711*c41)-c41
c52 <- (1.063548*c51)-c51
c62 <- (1.064775*c61)-c61
c03 <- (1.022187 *c02)-c02
c13 <- (1.014858 *c12)-c12
c23 <- (1.026297 *c22)-c22
c33 <- (1.020794 *c32)-c32
c43 <- (1.029788 *c42)-c42
c53 <- (1.025548 *c52)-c52
c04 <- (1.021595*c03)-c03
c14 <- (1.006542*c13)-c13
c24 <- (1.014890*c23)-c23
c34 <- (1.014208*c33)-c33
c44 <- (1.024366*c43)-c43
c05 <- (1.006353*c04)-c04
c15 <- (1.003507*c14)-c14
c25 <- (1.006288*c24)-c24
c35 <- (1.009307*c34)-c34
c06 <- (1.006688*c05)-c05
c16 <- (1.005037*c15)-c15
c26 <- (1.005113*c25)-c25
c07 <- (1.001499 *c06)-c06
c17 <- (1.001063 *c16)-c16

```

c08 <- (1.001122*c07)-c07

e01 <- (1007865-c01)^2

e11 <- (1202373-c11)^2

e21 <- (1102305-c21)^2

e31 <- (993787-c31)^2

e41 <- (1016751-c41)^2

e51 <- (1047533-c51)^2

e61 <- (1071559-c61)^2

e71 <- (1014853-c71)^2

e02 <- (257673-c02)^2

e12 <- (230823-c12)^2

e22 <- (276686-c22)^2

e32 <- (230567-c32)^2

e42 <- (242183-c42)^2

e52 <- (212135-c52)^2

e62 <- (208560-c62)^2

e03 <- (76948-c03)^2

e13 <- (56221-c13)^2

e23 <- (97322-c23)^2

e33 <- (70612-c33)^2

e43 <- (101258-c43)^2

e53 <- (90704-c53)^2

e04 <- (76557-c04)^2

e14 <- (25120-c14)^2

e24 <- (56557-c24)^2

e34 <- (49250-c34)^2

e44 <- (85292-c44)^2

```

e05 <- (23009-c05)^2
e15 <- (13557-c15)^2
e25 <- (24238-c25)^2
e35 <- (32719-c35)^2
e06 <- (24376-c06)^2
e16 <- (19537-c16)^2
e26 <- (19832-c26)^2
e07 <- (5499-c07)^2
e17 <- (4144-c17)^2
e08 <- (4122-c08)^2

sumerrores <-
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)

errorprimvari <- sqrt(sumerrores/45);errorprimvari

#La desviación total hasta la fecha

latest <-
3678633+3902425+3898825+3548422+3585812+3641036+3428335+3158581+21447
38

ultimate <-
3678633+3906803+3908198+3571313+3639555+3771945+3660143+3600726+36148
94

desvhasfech <- latest/ultimate;desvhasfech

#Variante 2

vpf2 <- ibnrchlvar2(c(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8))

sum(vpf2)

ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)

i.renta <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i)}

```

```

}
i.renta
prov.renta2 <- sum(vpf2*i.renta)
prov.renta2
f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])
}
f.fluxe
i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))
for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)
}
i.fluxe
prov.fluxe2 <- sum(vpf2*i.fluxe*f.fluxe)
prov.fluxe2

#errores
c01 <- (1.475929*2202584)-2202584
c11 <- (1.475929*2350650)-2350650
c21 <- (1.475929*2321885)-2321885
c31 <- (1.475929*2171487)-2171487
c41 <- (1.475929*2140328)-2140328
c51 <- (1.475929*2290664)-2290664
c61 <- (1.475929*2148216)-2148216
c71 <- (1.475929*2143728)-2143728
c02 <- (1.070461*c01)-c01
c12 <- (1.070461*c11)-c11
c22 <- (1.070461*c21)-c21

```



```

c32 <- (1.070461*c31)-c31
c42 <- (1.070461*c41)-c41
c52 <- (1.070461*c51)-c51
c62 <- (1.070461*c61)-c61
c03 <- (1.024095 *c02)-c02
c13 <- (1.024095 *c12)-c12
c23 <- (1.024095 *c22)-c22
c33 <- (1.024095 *c32)-c32
c43 <- (1.024095 *c42)-c42
c53 <- (1.024095 *c52)-c52
c04 <- (1.01676*c03)-c03
c14 <- (1.01676*c13)-c13
c24 <- (1.01676*c23)-c23
c34 <- (1.01676*c33)-c33
c44 <- (1.01676*c43)-c43
c05 <- (1.006588*c04)-c04
c15 <- (1.006588*c14)-c14
c25 <- (1.006588*c24)-c24
c35 <- (1.006588*c34)-c34
c06 <- (1.005538*c05)-c05
c16 <- (1.005538*c15)-c15
c26 <- (1.005538*c25)-c25
c07 <- (1.001266 *c06)-c06
c17 <- (1.001266 *c16)-c16
c08 <- (1.001122*c07)-c07
e01 <- (1007865-c01)^2
e11 <- (1202373-c11)^2

```

$$e_{21} <- (1102305 - c_{21})^2$$

$$e_{31} <- (993787 - c_{31})^2$$

$$e_{41} <- (1016751 - c_{41})^2$$

$$e_{51} <- (1047533 - c_{51})^2$$

$$e_{61} <- (1071559 - c_{61})^2$$

$$e_{71} <- (1014853 - c_{71})^2$$

$$e_{02} <- (257673 - c_{02})^2$$

$$e_{12} <- (230823 - c_{12})^2$$

$$e_{22} <- (276686 - c_{22})^2$$

$$e_{32} <- (230567 - c_{32})^2$$

$$e_{42} <- (242183 - c_{42})^2$$

$$e_{52} <- (212135 - c_{52})^2$$

$$e_{62} <- (208560 - c_{62})^2$$

$$e_{03} <- (76948 - c_{03})^2$$

$$e_{13} <- (56221 - c_{13})^2$$

$$e_{23} <- (97322 - c_{23})^2$$

$$e_{33} <- (70612 - c_{33})^2$$

$$e_{43} <- (101258 - c_{43})^2$$

$$e_{53} <- (90704 - c_{53})^2$$

$$e_{04} <- (76557 - c_{04})^2$$

$$e_{14} <- (25120 - c_{14})^2$$

$$e_{24} <- (56557 - c_{24})^2$$

$$e_{34} <- (49250 - c_{34})^2$$

$$e_{44} <- (85292 - c_{44})^2$$

$$e_{05} <- (23009 - c_{05})^2$$

$$e_{15} <- (13557 - c_{15})^2$$

$$e_{25} <- (24238 - c_{25})^2$$

```

e35 <- (32719-c35)^2
e06 <- (24376-c06)^2
e16 <- (19537-c16)^2
e26 <- (19832-c26)^2
e07 <- (5499-c07)^2
e17 <- (4144-c17)^2
e08 <- (4122-c08)^2

sumerrores <-
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)

errorsegunvari <- sqrt(sumerrores/45);errorsegunvari

#La desviación total hasta la fecha

latest <-
3678633+3902425+3898825+3548422+3585812+3641036+3428335+3158581+21447
38

ultimate <-
3678633+3906803+3908142+3576598+3638094+3756038+3621835+3571974+35797
77

desvhasfech <- latest/ultimate;desvhasfech

```

#Mínimos cuadrados de De Vylder

```

menuprovisio()

vpf <- ibnrvylder(c(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8))

sum(vpf)

ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)

i.renta <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i)}

i.renta

```

```

prov.renta <- sum(vpf*i.renta)

prov.renta

f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))

for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])

}

f.fluxe

i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))

for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)

}

i.fluxe

prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)

prov.fluxe


#errores

c01 <- 0.285516364*3968507
c11 <- 0.285516364*3875530
c21 <- 0.285516364*3595726
c31 <- 0.285516364*3572791
c41 <- 0.285516364*3788998
c51 <- 0.285516364*3611601
c61 <- 0.285516364*3571822
c71 <- 0.285516364*3577448
c02 <- 0.063588066*3968507
c12 <- 0.063588066*3875530
c22 <- 0.063588066*3595726
c32 <- 0.063588066*3572791
c42 <- 0.063588066*3788998

```

```

c52 <- 0.063588066*3611601
c62 <- 0.063588066*3571822
c03 <- 0.021872186 *3968507
c13 <- 0.021872186*3875530
c23 <- 0.021872186 *3595726
c33 <- 0.021872186 *3572791
c43 <- 0.021872186 *3788998
c53 <- 0.021872186 *3611601
c04 <- 0.015477048*3968507
c14 <- 0.015477048*3875530
c24 <- 0.015477048*3595726
c34 <- 0.015477048*3572791
c44 <- 0.015477048*3788998
c05 <- 0.006126433*3968507
c15 <- 0.006126433*3875530
c25 <- 0.006126433*3595726
c35 <- 0.006126433*3572791
c06 <- 0.005518980*3968507
c16 <- 0.005518980*3875530
c26 <- 0.005518980*3595726
c07 <- 0.001255898 *3968507
c17 <- 0.001255898 *3875530
c08 <- 0.001128815*3968507
e01 <- (1007865-c01)^2
e11 <- (1202373-c11)^2
e21 <- (1102305-c21)^2
e31 <- (993787-c31)^2

```

e41 <- (1016751-c41)^2

e51 <- (1047533-c51)^2

e61 <- (1071559-c61)^2

e71 <- (1014853-c71)^2

e02 <- (257673-c02)^2

e12 <- (230823-c12)^2

e22 <- (276686-c22)^2

e32 <- (230567-c32)^2

e42 <- (242183-c42)^2

e52 <- (212135-c52)^2

e62 <- (208560-c62)^2

e03 <- (76948-c03)^2

e13 <- (56221-c13)^2

e23 <- (97322-c23)^2

e33 <- (70612-c33)^2

e43 <- (101258-c43)^2

e53 <- (90704-c53)^2

e04 <- (76557-c04)^2

e14 <- (25120-c14)^2

e24 <- (56557-c24)^2

e34 <- (49250-c34)^2

e44 <- (85292-c44)^2

e05 <- (23009-c05)^2

e15 <- (13557-c15)^2

e25 <- (24238-c25)^2

e35 <- (32719-c35)^2

e06 <- (24376-c06)^2

```

e16 <- (19537-c16)^2

e26 <- (19832-c26)^2

e07 <- (5499-c07)^2

e17 <- (4144-c17)^2

e08 <- (4122-c08)^2

sumerrores <-
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)

errordevydl <- sqrt(sumerrores/45);errordevydl

#La desviación total hasta la fecha

latest <-
3678633+3902425+3898825+3548422+3585812+3641036+3428335+3158581+21447
38

ultimate <-
3678633+3906905+3908067+3576842+3635939+3752839+3613897+3569224+35774
48

desvhasfech <- latest/ultimate;desvhasfech

#MODELO MACK
MackChainLadder(CUMMW2008, weights = 1, alpha=1, est.sigma="log-linear",
tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL, mse.method="Mack")
mch <- MackChainLadder(CUMMW2008)
names(mch)
mch$Triangle
mch$Mack.ProcessRisk
mch$Total.ProcessRisk
sum(mch$Total.ProcessRisk)
mch$Mack.S.E

#Triangulo acumulado con las estimaciones ChainLadder
mch$FullTriangle
#Factores de desarrollo que se calculan con ChainLadder
mch$f
CUMMW2008
a <- matrix(c(rep(0,dim(CUMMW2008)[1]),mch$FullTriangle),
nrow = dim(CUMMW2008)[1], ncol=dim(CUMMW2008)[1])
noncumFullTriangle <- mch$FullTriangle-a
noncumFullTriangle

```

```

vpf <- rep(0,dim(CUMMW2008)[1]-1)
for (k in 1:dim(CUMMW2008)[1]-1) {
  future <- row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(CUMMW2008)[1]+k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

#Vector de pagos futuros
vpf
sum(vpf)
ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])
}
i.renta
prov.renta <- sum(vpf*i.renta)
prov.renta
f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])
}
f.fluxe
i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))
for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)
}
i.fluxe
prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)
prov.fluxe

#CDR
## S3 method for class 'MackChainLadder'
CDR(MackChainLadder(CUMMW2008, weights = 1, alpha=1, est.sigma="log-linear",
tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL, mse.method="Mack"))

mch$FullTriangle

z9<-mch$FullTriangle[9,1]+mch$FullTriangle[8,2]-
mch$FullTriangle[8,1]+mch$FullTriangle[7,3]-
mch$FullTriangle[7,2]+mch$FullTriangle[6,4]-
mch$FullTriangle[6,3]+mch$FullTriangle[5,5]-
mch$FullTriangle[5,4]+mch$FullTriangle[4,6]-
mch$FullTriangle[4,5]+mch$FullTriangle[3,7]-
mch$FullTriangle[3,6]+mch$FullTriangle[2,8]-
mch$FullTriangle[2,7]+mch$FullTriangle[1,9]-mch$FullTriangle[1,8]
z10<-mch$FullTriangle[9,2]-mch$FullTriangle[9,1]+mch$FullTriangle[8,3]-
mch$FullTriangle[8,2]+mch$FullTriangle[7,4]-
mch$FullTriangle[7,3]+mch$FullTriangle[6,5]-
mch$FullTriangle[6,4]+mch$FullTriangle[5,6]-
mch$FullTriangle[5,5]+mch$FullTriangle[4,7]-

```



```

mch$FullTriangle[4,6]+mch$FullTriangle[3,8]-
mch$FullTriangle[3,7]+mch$FullTriangle[2,9]-mch$FullTriangle[2,8]
z11<-mch$FullTriangle[9,3]-mch$FullTriangle[9,2]+mch$FullTriangle[8,4]-
mch$FullTriangle[8,3]+mch$FullTriangle[7,5]-
mch$FullTriangle[7,4]+mch$FullTriangle[6,6]-
mch$FullTriangle[6,5]+mch$FullTriangle[5,7]-
mch$FullTriangle[5,6]+mch$FullTriangle[4,8]-
mch$FullTriangle[4,7]+mch$FullTriangle[3,9]-mch$FullTriangle[3,8]
z12<-mch$FullTriangle[9,4]-mch$FullTriangle[9,3]+mch$FullTriangle[8,5]-
mch$FullTriangle[8,4]+mch$FullTriangle[7,6]-
mch$FullTriangle[7,5]+mch$FullTriangle[6,7]-
mch$FullTriangle[6,6]+mch$FullTriangle[5,8]-
mch$FullTriangle[5,7]+mch$FullTriangle[4,9]-mch$FullTriangle[4,8]
z13<-mch$FullTriangle[9,5]-mch$FullTriangle[9,4]+mch$FullTriangle[8,6]-
mch$FullTriangle[8,5]+mch$FullTriangle[7,7]-
mch$FullTriangle[7,6]+mch$FullTriangle[6,8]-
mch$FullTriangle[6,7]+mch$FullTriangle[5,9]-mch$FullTriangle[5,8]
z14<-mch$FullTriangle[9,6]-mch$FullTriangle[9,5]+mch$FullTriangle[8,7]-
mch$FullTriangle[8,6]+mch$FullTriangle[7,8]-
mch$FullTriangle[7,7]+mch$FullTriangle[6,9]-mch$FullTriangle[6,8]
z15<-mch$FullTriangle[9,7]-mch$FullTriangle[9,6]+mch$FullTriangle[8,8]-
mch$FullTriangle[8,7]+mch$FullTriangle[7,9]-mch$FullTriangle[7,8]
z16<-mch$FullTriangle[9,8]-mch$FullTriangle[9,7]+mch$FullTriangle[8,9]-
mch$FullTriangle[8,8]
z17<-mch$FullTriangle[9,9]-mch$FullTriangle[9,8]
sum(z9,z10,z11,z12,z13,z14,z15,z16,z17)

```

```

names(mch)
mch$Triangle
mch$Mack.ProcessRisk
mch$Total.ProcessRisk
sum(mch$Total.ProcessRisk)
mch$Mack.S.E
mch$Total.Mack.S.E
mch$Mack.ParameterRisk
names(mch)

```

```

z09<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,1]+mch$Mack.ProcessRisk[8,2]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,1]+mch$Mack.ProcessRisk[7,3]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,2]+mch$Mack.ProcessRisk[6,4]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,3]+mch$Mack.ProcessRisk[5,5]-
mch$Mack.ProcessRisk[5,4]+mch$Mack.ProcessRisk[4,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[4,5]+mch$Mack.ProcessRisk[3,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[3,6]+mch$Mack.ProcessRisk[2,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[2,7]+mch$Mack.ProcessRisk[1,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[1,8])^2
z10<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,2]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,1])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,3]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,2])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,4]-

```

```

mch$Mack.ProcessRisk[7,3])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[6,5]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,4])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[5,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[5,5])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[4,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[4,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[3,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[3,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[2,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[2,8])^2
z11<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,3]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,2])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,4]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,3])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,5]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,4])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[6,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,5])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[5,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[5,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[4,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[4,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[3,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[3,8])^2
z12<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,4]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,3])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,5]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,4])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,5])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[6,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[5,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[5,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[4,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[4,8])^2
z13<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,5]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,4])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,5])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[6,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[5,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[5,8])^2
z14<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,6]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,5])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[6,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[6,8])^2
z15<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,7]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,6])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[7,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[7,8])^2
z16<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,8]-
mch$Mack.ProcessRisk[9,7])^2+(mch$Mack.ProcessRisk[8,9]-
mch$Mack.ProcessRisk[8,8])^2
z17<-(mch$Mack.ProcessRisk[9,9]-mch$Mack.ProcessRisk[9,8])^2

```

```

sum(z10,z11,z12,z13,z14,z15,z16,z17)

```

```

zz9<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,1]+mch$Mack.ParameterRisk[8,2]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,1]+mch$Mack.ParameterRisk[7,3]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,2]+mch$Mack.ParameterRisk[6,4]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,3]+mch$Mack.ParameterRisk[5,5]-
mch$Mack.ParameterRisk[5,4]+mch$Mack.ParameterRisk[4,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[4,5]+mch$Mack.ParameterRisk[3,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[3,6]+mch$Mack.ParameterRisk[2,8]-

```

```

mch$Mack.ParameterRisk[2,7]+mch$Mack.ParameterRisk[1,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[1,8])^2
zz10<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,2]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,1])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,3]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,2])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,4]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,3])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[6,5]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,4])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[5,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[5,5])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[4,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[4,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[3,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[3,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[2,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[2,8])^2
zz11<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,3]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,2])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,4]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,3])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,5]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,4])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[6,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,5])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[5,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[5,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[4,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[4,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[3,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[3,8])^2
zz12<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,4]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,3])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,5]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,4])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,5])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[6,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[5,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[5,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[4,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[4,8])^2
zz13<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,5]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,4])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,5])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[6,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[5,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[5,8])^2
zz14<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,6]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,5])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[6,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[6,8])^2
zz15<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,7]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,6])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[7,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[7,8])^2
zz16<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,8]-
mch$Mack.ParameterRisk[9,7])^2+(mch$Mack.ParameterRisk[8,9]-
mch$Mack.ParameterRisk[8,8])^2
zz17<-(mch$Mack.ParameterRisk[9,9]-mch$Mack.ParameterRisk[9,8])^2

z17+zz17
sqrt(z17+zz17)
sqrt(z17+zz17)/4009.511
z16+zz16

```

```

sqrt(z16+zz16)
sqrt(z16+zz16)/8549.621
z15+zz15
sqrt(z15+zz15)
sqrt(z15+zz15)/28435.49
z14+zz14
sqrt(z14+zz14)
sqrt(z14+zz14)/50809.02
z13+zz13
sqrt(z13+zz13)
sqrt(z13+zz13)/107054.9
z12+zz12
sqrt(z12+zz12)
sqrt(z12+zz12)/186310.9
z11+zz11
sqrt(z11+zz11)
sqrt(z11+zz11)/414953.1
z10+zz10
sqrt(z10+zz10)
sqrt(z10+zz10)/1437704
(sqrt(z17+zz17)+sqrt(z16+zz16)+sqrt(z15+zz15)+sqrt(z14+zz14)+sqrt(z13+zz13)+sqrt(
z12+zz12)+sqrt(z11+zz11)+sqrt(z10+zz10))/2237826

```

#GLM POISSON FORMULA

```

triangle <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8),ncol=9)
triangle <- t(triangle)
triangle <- as.triangle(triangle)
glmpf <- glmReserve(triangle,mse.method = "formula")
names(glmpf)
glmpf$FullTriangle
a <- matrix(c(rep(0,dim(triangle)[1]),glmpf$FullTriangle),
            nrow = dim(triangle)[1], ncol=dim(triangle)[1])
noncumFullTriangle <- glmpf$FullTriangle-a
vpf <- rep(0,dim(triangle)[1]-1)
for (k in 1:dim(triangle)[1]-1) {
  future <- row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(CUMMW2008)[1]+k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

#Vector de pagos futuros
vpf
ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])
}
i.renta
prov.renta <- sum(vpf*i.renta)
prov.renta
f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))

```

```

for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])
}
f.fluxe
i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))
for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)
}
i.fluxe
prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)
prov.fluxe

```

```

#Predicción año de origen y año de desarrollo
glmpf$model

```

```

#errores
c01 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-0.74249)
c11 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-0.74249)
c21 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-0.74249)
c31 <- exp(14.60620)*exp(-0.01131)*exp(-0.74249)
c41 <- exp(14.60620)*exp(0.01997)*exp(-0.74249)
c51 <- exp(14.60620)*exp(-0.01733)*exp(-0.74249)
c61 <- exp(14.60620)*exp(-0.02985)*exp(-0.74249)
c71 <- exp(14.60620)*exp(-0.02767)*exp(-0.74249)
c02 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-2.24317)
c12 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-2.24317)
c22 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-2.24317)
c32 <- exp(14.60620)*exp(-0.01131)*exp(-2.24317)
c42 <- exp(14.60620)*exp(0.01997)*exp(-2.24317)
c52 <- exp(14.60620)*exp(-0.01733)*exp(-2.24317)
c62 <- exp(14.60620)*exp(-0.02985)*exp(-2.24317)
c03 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-3.30702)
c13 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-3.30702)
c23 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-3.30702)
c33 <- exp(14.60620)*exp(-0.01131)*exp(-3.30702)
c43 <- exp(14.60620)*exp(0.01997)*exp(-3.30702)
c53 <- exp(14.60620)*exp(-0.01733)*exp(-3.30702)
c04 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-3.64543)
c14 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-3.64543)
c24 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-3.64543)
c34 <- exp(14.60620)*exp(-0.01131)*exp(-3.64543)
c44 <- exp(14.60620)*exp(0.01997)*exp(-3.64543)
c05 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-4.57043)
c15 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-4.57043)
c25 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-4.57043)
c35 <- exp(14.60620)*exp(-0.01131)*exp(-4.57043)
c06 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-4.68280)
c16 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-4.68280)
c26 <- exp(14.60620)*exp(-0.02807)*exp(-4.68280)
c07 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-6.15590)
c17 <- exp(14.60620)*exp(0.06053)*exp(-6.15590)
c08 <- exp(14.60620)*exp(0.06018)*exp(-6.28210)

```

```

e01 <- (1007865-c01)^2
e11 <- (1202373-c11)^2
e21 <- (1102305-c21)^2
e31 <- (993787-c31)^2
e41 <- (1016751-c41)^2
e51 <- (1047533-c51)^2
e61 <- (1071559-c61)^2
e71 <- (1014853-c71)^2
e02 <- (257673-c02)^2
e12 <- (230823-c12)^2
e22 <- (276686-c22)^2
e32 <- (230567-c32)^2
e42 <- (242183-c42)^2
e52 <- (212135-c52)^2
e62 <- (208560-c62)^2
e03 <- (76948-c03)^2
e13 <- (56221-c13)^2
e23 <- (97322-c23)^2
e33 <- (70612-c33)^2
e43 <- (101258-c43)^2
e53 <- (90704-c53)^2
e04 <- (76557-c04)^2
e14 <- (25120-c14)^2
e24 <- (56557-c24)^2
e34 <- (49250-c34)^2
e44 <- (85292-c44)^2
e05 <- (23009-c05)^2
e15 <- (13557-c15)^2
e25 <- (24238-c25)^2
e35 <- (32719-c35)^2
e06 <- (24376-c06)^2
e16 <- (19537-c16)^2
e26 <- (19832-c26)^2
e07 <- (5499-c07)^2
e17 <- (4144-c17)^2
e08 <- (4122-c08)^2
sumerrores
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)
errorpoissonformula <- sqrt(sumerrores/45);errorpoissonformula

glmReserve(triangle, var.power = 1, link.power = 0, cum = TRUE,
            mse.method = c("formula"), nsim = 1000, nb = FALSE)

#Año calendario
library(statmod)
library(tweedie)
triangMW <- rbind(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8)
triangMWacum <- rbind(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8)
print(triangMWacum)

```

```

print(triangMW)
glmProvision(triangMW)
glmPoissonformula<-glmProvision(triangMW)
glmPoissonformula
glmPoissonformula$summary.oy
glmPoissonformula$summary.cy

#GLM POISSON BOOTSTRAP
triangle <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8),ncol=9)
triangle <- t(triangle)
triangle <- as.triangle(triangle)

glmpb <- glmReserve(triangle,mse.method = "bootstrap")
names(glmpb)
glmpb$FullTriangle
glmpb$sims.reserve.mean
glmpb$FullTriangle
glmpb$model
a <- matrix(c(rep(0,dim(triangle)[1]),glmpb$FullTriangle),
            nrow = dim(triangle)[1], ncol=dim(triangle)[1])
noncumFullTriangle <- glmpb$FullTriangle-a

vpf <- rep(0,dim(triangle)[1]-1)
for (k in 1:dim(triangle)[1]-1) {
  future <- row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(CUMMW2008)[1]+k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

#Vector de pagos futuros
vpf
ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])
}
i.renta
prov.renta <- sum(vpf*i.renta)
prov.renta
f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])
}
f.fluxe
i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))
for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)
}
i.fluxe
prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)
prov.fluxe

glmReserve(triangle, var.power = 1, link.power = 0, cum = TRUE,

```

```

mse.method = c("bootstrap"), nsim = 1000, nb = FALSE)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(triangle,R=1000,process.distr = c("od.pois")))
#Año calendario
library(statmod)
library(tweedie)
triangMW <- rbind(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8)
triangMWacum <- rbind(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8)
print(triangMWacum)
print(triangMW)
glmProvision(triangMW,peMethod="bootstrap")
glmPoissonboot<-glmProvision(triangMW,peMethod="bootstrap")
glmPoissonboot$summary.oy
glmPoissonboot$summary.cy
glmReserve(triangle, var.power = 1, link.power = 0, cum = TRUE,
            mse.method = c("formula"), nsim = 1000, nb = FALSE)

#Año calendario
library(statmod)
library(tweedie)
triangMW <- rbind(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8)
triangMWacum <- rbind(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8)
print(triangMWacum)
print(triangMW)
glmProvision(triangMW)
glmPoissonformula<-glmProvision(triangMW)
glmPoissonformula
glmPoissonformula$summary.oy
glmPoissonformula$summary.cy

#GLM GAMMA FORMULA
triangle <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8),ncol=9)
triangle <- t(triangle)
triangle <- as.triangle(triangle)
glmgf <- glmReserve(triangle,mse.method = "formula",var.power = 2,link.power = 0)
names(glmgf)
glmgf$FullTriangle
glmgf$sims.reserve.mean
glmgf$sims.reserve.pred
a <- matrix(c(rep(0,dim(triangle)[1]),glmgf$FullTriangle),
            nrow = dim(triangle)[1], ncol=dim(triangle)[1])
noncumFullTriangle <- glmgf$FullTriangle-a
vpf <- rep(0,dim(triangle)[1]-1)
for (k in 1:dim(triangle)[1]-1) {
  future <- row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
  dim(CUMMW2008)[1]+k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

```



```

#Vector de pagos futuros
vpf
sum(vpf)
ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])
}
i.renta
prov.renta <- sum(vpf*i.renta)
prov.renta
f.fluxe <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {f.fluxe[i] <- (1-((1+ETI.V[i])^(-1)))/log(1+ETI.V[i])
}
f.fluxe
i.fluxe <- rep(1,length(ETI.V))
for (i in 2:length(ETI.V)) {i.fluxe[i] <- (1+ETI.V[i])^(-i+1)
}
i.fluxe
prov.fluxe <- sum(vpf*i.fluxe*f.fluxe)
prov.fluxe

```

```

#Predicción año de origen y año de desarrollo

```

```

glm$fit$dev

```

```

#errores

```

```

c01 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-0.739705)
c11 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-0.739705)
c21 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-0.739705)
c31 <- exp(14.686819)*exp(0.070425)*exp(-0.739705)
c41 <- exp(14.686819)*exp(-0.056698)*exp(-0.739705)
c51 <- exp(14.686819)*exp(-0.118133)*exp(-0.739705)
c61 <- exp(14.686819)*exp(-0.112802)*exp(-0.739705)
c71 <- exp(14.686819)*exp(-0.108291)*exp(-0.739705)
c02 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-2.249475)
c12 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-2.249475)
c22 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-2.249475)
c32 <- exp(14.686819)*exp(0.070425)*exp(-2.249475)
c42 <- exp(14.686819)*exp(-0.056698)*exp(-2.249475)
c52 <- exp(14.686819)*exp(-0.118133)*exp(-2.249475)
c62 <- exp(14.686819)*exp(-0.112802)*exp(-2.249475)
c03 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-3.330733)
c13 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-3.330733)
c23 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-3.330733)
c33 <- exp(14.686819)*exp(0.070425)*exp(-3.330733)
c43 <- exp(14.686819)*exp(-0.056698)*exp(-3.330733)
c53 <- exp(14.686819)*exp(-0.118133)*exp(-3.330733)
c04 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-3.692407)
c14 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-3.692407)
c24 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-3.692407)
c34 <- exp(14.686819)*exp(0.070425)*exp(-3.692407)

```

```

c44 <- exp(14.686819)*exp(-0.056698)*exp(-3.692407)
c05 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-4.563839)
c15 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-4.563839)
c25 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-4.563839)
c35 <- exp(14.686819)*exp(0.070425)*exp(-4.563839)
c06 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-4.634507)
c16 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-4.634507)
c26 <- exp(14.686819)*exp(-0.058098)*exp(-4.634507)
c07 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-6.086980)
c17 <- exp(14.686819)*exp(-0.006942)*exp(-6.086980)
c08 <- exp(14.686819)*exp(-0.257782)*exp(-6.362725)
e01 <- (1007865-c01)^2
e11 <- (1202373-c11)^2
e21 <- (1102305-c21)^2
e31 <- (993787-c31)^2
e41 <- (1016751-c41)^2
e51 <- (1047533-c51)^2
e61 <- (1071559-c61)^2
e71 <- (1014853-c71)^2
e02 <- (257673-c02)^2
e12 <- (230823-c12)^2
e22 <- (276686-c22)^2
e32 <- (230567-c32)^2
e42 <- (242183-c42)^2
e52 <- (212135-c52)^2
e62 <- (208560-c62)^2
e03 <- (76948-c03)^2
e13 <- (56221-c13)^2
e23 <- (97322-c23)^2
e33 <- (70612-c33)^2
e43 <- (101258-c43)^2
e53 <- (90704-c53)^2
e04 <- (76557-c04)^2
e14 <- (25120-c14)^2
e24 <- (56557-c24)^2
e34 <- (49250-c34)^2
e44 <- (85292-c44)^2
e05 <- (23009-c05)^2
e15 <- (13557-c15)^2
e25 <- (24238-c25)^2
e35 <- (32719-c35)^2
e06 <- (24376-c06)^2
e16 <- (19537-c16)^2
e26 <- (19832-c26)^2
e07 <- (5499-c07)^2
e17 <- (4144-c17)^2
e08 <- (4122-c08)^2
sumerrores
sum(e01,e11,e21,e31,e41,e51,e61,e71,e02,e12,e22,e32,e42,e52,e62,e03,e13,e23,e33,e4
3,e43,e04,e14,e24,e34,e44,e05,e15,e25,e35,e06,e16,e26,e07,e17,e08)

```

```

errorgammaformula <- sqrt(sumerrores/45);errorgammaformula

glmReserve(triangle, var.power = 2, link.power = 0, cum = TRUE,
           mse.method = c("formula"), nsim = 1000, nb = FALSE)

#Año calendario
library(statmod)
library(tweedie)
triangMW <- rbind(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8)
triangMWacum <- rbind(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8)
print(triangMWacum)
print(triangMW)
glmProvision(triangMW,fam=2)
glmGammaformula<-glmProvision(triangMW,fam=2)
glmGammaformula
glmGammaformula$summary.oy
glmGammaformula$summary.cy

#GLM GAMMA BOOTSTRAP
triangle <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8),ncol=9)
triangle <- t(triangle)
triangle <- as.triangle(triangle)
glmgb <- glmReserve(triangle,mse.method = "bootstrap",var.power = 2,link.power = 0)
names(glmgb)
glmgb$FullTriangle
glmgb$model
a <- matrix(c(rep(0,dim(triangle)[1]),glmgb$FullTriangle),
           nrow = dim(triangle)[1], ncol=dim(triangle)[1])
noncumFullTriangle <- glmgb$FullTriangle-a
vpf <- rep(0,dim(triangle)[1]-1)
for (k in 1:dim(triangle)[1]-1) {
  future <- row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
  dim(CUMMW2008)[1]+k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

#Vector de pagos futuros
vpf
ETI.V <- c(-0.00555,-0.00525,-0.00455,-0.00386,-0.00306,-0.00226,-0.00149,-0.00068)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i] <- (1+ETI.V[i])
}
i.renta
prov.renta <- sum(vpf*i.renta)
prov.renta
glmReserve(triangle, var.power = 2, link.power = 0, cum = TRUE,
           mse.method = c("bootstrap"), nsim = 1000, nb = FALSE)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'

```

```
CDR(BootChainLadder(triangle,R=1000,process.distr = c("gamma")))
```

```
#Año calendario
library(statmod)
library(tweedie)
triangMW <- rbind(c0,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8)
triangMWacum <- rbind(C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8)
print(triangMWacum)
print(triangMW)
glmProvision(triangMW,fam=2,peMethod="bootstrap")
glmGammaboot<-glmProvision(triangMW,fam=2,peMethod="bootstrap")
glmGammaboot
glmGammaboot$summary.oy
glmGammaboot$summary.cy
```

#FUNCION glmProvision

```
function(lossData,
          peMethod = "formula",
          fam = 1, link = 0,
          B = 1000,
          seed = NULL){
  # 1. Check input ----
  if (! (class(lossData) == "matrix")){
    stop("Object lossData is not a matrix.")
  }
  check_Data(lossData)
  # Function arguments
  if (! (peMethod %in% c("formula", "bootstrap"))){
    stop("Arg peMethod must be either one of 'formula', 'bootstrap'.")
  }
  if (peMethod == "bootstrap"){
    if (! (is.numeric(B) & B > 0)){
      stop(paste0("Selected method is bootstrap but the number of iterations ",
                  "(B) is not a positive integer."))
    }
  }
  # 2. Save common variables ----
  t <- nrow(lossData)
  oy <- rep(1:t, t:1); oy <- as.factor(oy)
  dy <- sequence(t:1); dy <- as.factor(dy)
  v.lossData <- as.vector(t(lossData))
  cij <- v.lossData[!is.na(v.lossData)]

  ## Incremental losses matrix
  glmPro <- glm(cij ~ oy + dy, family = statmod::tweedie(fam, link))
  # Results function to compute the missing values
  triangglm <- results(triang = lossData, glm.res = glmPro)$newtriang
  payments <- results(triang = lossData, glm.res = glmPro)$payments

  ## Origin year reserve
```

```

oyres <- rep(0, t-1)
for (i in 2:t){
  oyres[i-1] <- sum(triangglm[i, (t-i+2):t])
}

## Total reserve
totres <- sum(oyres)

## Vector of future payments
fpv <- rep(0, dim(triangglm)[1] - 1)
for (k in 1:dim(triangglm)[1] - 1){
  future <- row(triangglm) + col(triangglm) - 1 == dim(triangglm)[1] + k
  fpv[k] <- sum(triangglm[future])
}

## Pearson residuals
ro <- fam
coefs <- exp(as.numeric(coef(glmPro)))
alpha <- c(1, coefs[2:t])*coefs[1]
beta <- c(1,coefs[(t+1):(2*t-1)])
orig.fits <- alpha %%% t(beta)
future <- row(orig.fits) + col(orig.fits) - 1 > t
Prs.resid <- (cij - fitted(glmPro)) / sqrt(fitted(glmPro)^ro)

## Computation of n, p and phi.p
n <- (t * (t + 1)) / 2
p <- 2 * t - 1
phi.P <- sum(Prs.resid^2) / (n-p)

## Scaled residuals
Adj.Pr.resid <- Prs.resid * sqrt(n / (n-p))

## Variance and covariance matrices
cij.l <- xtabs(cij ~ oy + dy)
cij.v <- as.vector(cij.l)
ii <- row(cij.l); jj <- col(cij.l)
futurebis <- as.numeric(ii+jj-1 > k)
ii <- as.factor(ii); jj <- as.factor(jj)
Cov.eta <- model.matrix(cij.v ~ ii + jj) %%% vcov(glmPro) %%%
  t(model.matrix(cij.v ~ ii + jj))
mu.hat <- as.vector(orig.fits * future)

# 3. Method: formula ----
if(peMethod == "formula"){ # Prediction error with formula.
  ## Total reserve
  PEfor <- sqrt(phi.P * sum(mu.hat^ro) + t(mu.hat) %%% Cov.eta %%% mu.hat)

  ## Origin year reserve
  mu.hat.m <- matrix(mu.hat, t, t)
  mu.hat.orig <- matrix(0, t, t)

```

```

mu.hat.vec <- numeric(t * t)
PEfororig <- numeric(t-1)

for(orig in 1:(t-1)){
  mu.hat.orig <- rbind(matrix(0, orig, t),
    mu.hat.m[orig+1, ],
    matrix(0, t-(orig+1), t))
  mu.hat.vec <- as.vector(mu.hat.orig)
  PEfororig[orig] <- sqrt(phi.P*sum(mu.hat.vec^ro) +
    t(mu.hat.vec) %*% Cov.eta %*% mu.hat.vec)
}

## Calendar year future payments
mu.hat.m <- matrix(mu.hat, t, t)
mu.hat.d <- matrix(0, t, t)
mu.hat.vec <- numeric(t*t)
PEforcal <- numeric(t-1)
for(cal in 2:t){
  mu.hat.d[row(mu.hat.m) + col(mu.hat.m) ==
    t + cal] <- mu.hat.m[row(mu.hat.m) + col(mu.hat.m) == t + cal]
  mu.hat.vec <- as.vector(mu.hat.d)
  PEforcal[cal-1] <- sqrt(phi.P * sum(mu.hat.vec^ro) +
    t(mu.hat.vec) %*% Cov.eta %*% mu.hat.vec)
  mu.hat.d <- matrix(0,t,t)
}
}

# 4. Method: bootstrap ----
if(peMethod == "bootstrap"){
  nBoot <- B
  # Total reserve
  if(! is.null(seed)){
    set.seed(seed)
  }
  payments <- reserves <- numeric(nBoot)
  for(boots in 1:nBoot){
    Ps.cij <- sample(Adj.Prs.resid, n, replace = TRUE)
    Ps.cij <- Ps.cij * sqrt(fitted(glmPro)) + fitted(glmPro)
    Ps.cij <- pmax(Ps.cij, 0)
    Ps.CL <- glm(Ps.cij ~ oy + dy , family = statmod::tweedie(fam, link))
    coefs <- exp(as.numeric(coef(Ps.CL)))
    Ps.alpha <- c(1, coefs[2:t]) * coefs[1]
    Ps.beta <- c(1, coefs[(t+1):(2*t-1)])
    Ps.fits <- Ps.alpha %*% t(Ps.beta)
    Ps.reserve <- sum(Ps.fits[future])
    Ps.totpayments <- tweedie::rtweedie(1, mu=Ps.reserve, phi=phi.P, power=fam)
    reserves[boots] <- Ps.reserve
    payments[boots] <- Ps.totpayments
  }
  PEbs <- sqrt(phi.P * sum(orig.fits[future]^ro)+sd(reserves)^2)

```

```

# Statistics
cv <- (sd(payments) / mean(payments)) * 100 # CV in percentage
pp <- (payments - mean(payments)) / sd(payments)
# sum(pp^3) / (nBoot-1) # Skewness estimation
# sum(pp^4) / (nBoot-1) - 3 # Kurtosis estimation
# hist(payments, breaks = 21, prob = TRUE, main = "Predictive distribution of total
reserve")
# lines(density(payments), lty="dashed")
# curve(dnorm(x, mean = mean(payments), sd = sd(payments)),
#       lty = "dotted", add = TRUE)

## Origin year reserve
if(! is.null(seed)){
  set.seed(seed)
}
payments <- reservesorig <- matrix(0, nBoot, t-1)
for (boots in 1:nBoot){
  Ps.cij <- sample(Adj.Prs.resid, n, replace = TRUE)
  Ps.cij <- Ps.cij * sqrt(fitted(glmPro)) + fitted(glmPro)
  Ps.cij <- pmax(Ps.cij, 0)
  Ps.CL <- glm(Ps.cij ~ oy + dy, family = statmod::tweedie(fam,link))
  coefs <- exp(as.numeric(coef(Ps.CL)))
  Ps.alpha <- c(1, coefs[2:t]) * coefs[1]
  Ps.beta <- c(1, coefs[(t+1):(2*t-1)])
  Ps.fits <- Ps.alpha %*% t(Ps.beta)
  provor <- numeric(t-1)
  payori <- numeric(t-1)
  for(orig in 1:(t-1)){
    provor[orig] <- sum(Ps.fits[orig+1, (t-(orig-1)):t])
    payori[orig] <- tweedie::rtweedie(1, mu = provor[orig],
                                     phi = phi.P, power = fam)
  }
  reservesorig[boots, ] <- provor
  payments[boots, ] <- payori
}

PEbsorig <- numeric(t-1)
for (orig in 1:(t-1)){
  PEbsorig[orig] <- sqrt(phi.P * sum((orig.fits[orig+1, (t-(orig-1)):t])^ro) +
                        sd(reservesorig[, orig])^2)
}

## Calendar year future payments
if(! is.null(seed)){
  set.seed(seed)
}
payments <- reservescal <- matrix(0, nBoot, t-1)

for (boots in 1:nBoot){

```

```

Ps.cij <- sample(Adj.Prs.resid, n, replace = TRUE)
Ps.cij <- Ps.cij * sqrt(fitted(glmPro)) + fitted(glmPro)
Ps.cij <- pmax(Ps.cij, 0)
Ps.CL <- glm(Ps.cij ~ oy + dy, family = statmod::tweedie(fam,link))
coefs <- exp(as.numeric(coef(Ps.CL)))
Ps.alpha <- c(1, coefs[2:t]) * coefs[1]
Ps.beta <- c(1, coefs[(t+1):(2*t-1)])
Ps.fits <- Ps.alpha %*% t(Ps.beta)

matres.m <- matrix(Ps.fits, t, t)
matres.d <- matrix(0, t, t)
provc <- numeric(t-1)
paycal <- numeric(t-1)
for(cal in 2:t){
  matres.d[row(matres.m) + col(matres.m) ==
    t + cal] <- matres.m[row(matres.m) + col(matres.m) == t + cal]
  provc[cal-1] <- sum(matres.d)
  paycal[cal-1] <- tweedie::rtweedie(1,mu=provc[cal-1],phi=phi.P,power=fam)
  matres.d <- matrix(0,t,t)
}
reservescal[boots, ] <- provc
payments[boots, ] <- paycal
}

PEbscal <- numeric(t-1)
cal.d <- matrix(0, t, t)
for(cal in 1:t-1){
  cal.d[row(triangglm) + col(triangglm) ==
    t+cal+1] <- triangglm[row(triangglm) + col(triangglm) == t+cal+1]
  PEbscal[cal] <- sqrt(phi.P*sum(cal.d^ro) + sd(reservescal[, cal])^2)
  cal.d <- matrix(0, t, t)
}

# Incremental triangles with bootstrap
if(! is.null(seed)){
  set.seed(seed)
}
bootlosses <- array(0, dim = c(t, t, nBoot))
for (boots in 1:nBoot){
  Ps.cij <- sample(Adj.Prs.resid, n, replace = TRUE)
  Ps.cij <- Ps.cij*sqrt(fitted(glmPro)) + fitted(glmPro)
  Ps.cij <- pmax(Ps.cij, 0)
  Ps.CL <- glm(Ps.cij ~ oy + dy, family = statmod::tweedie(fam,link))
  coefs <- exp(as.numeric(coef(Ps.CL)))
  Ps.alpha <- c(1, coefs[2:t])*coefs[1]
  Ps.beta <- c(1, coefs[(t+1):(2*t-1)])
  Ps.fits <- Ps.alpha %*% t(Ps.beta)
  matres.d <- matrix(0, t, t)
  matres.m <- matrix(Ps.fits, t, t)
  for (i in 1:t){

```



```

    for (j in 1:t){
      matres.d[i, j] <- tweedie::rtweedie(1, mu = matres.m[i, j],
                                          phi = phi.P, power = fam)
    }
  }
  bootlosses[, , boots] <- matres.d
}
}
# 5. Results object ----
if (peMethod == "bootstrap"){
  ## Summary creation - BOOTSTRAP
  increm.tri <- Increm.triangle(bootlosses)
  ## Origin year
  labelscy <- paste0("cy", (t+1):(t+ncol(lossData)-1))
  out.sum <- matrix(NA, ncol = 10, nrow = t+1,
                    dimnames = list(c(rownames(lossData), "TOTAL"),
                                    c("Latest.mean", "dev.to.date", "Ultimate.mean",
                                      "IBNR", "IBNR.mean", "PredErr.Abs", "CV",
                                      "IBNR.quantile.75", "IBNR.quantile.95",
                                      "IBNR.quantile.99"))))

  ## Latest
  latest <- matrix(NA, ncol = nrow(lossData), nrow = B)
  for (i in 1:B){
    latest[i, ] <- c(ObtainMDiagonal(increm.tri[, , i]))
  }
  out.sum[, 1] <- c(colMeans(latest), sum(colMeans(latest)))
  rm(latest, i)
  ## Ultimate
  ultimate <- NULL
  for (i in 1:nrow(bootlosses)){
    ultimate <- c(ultimate, mean(increm.tri[i, ncol(increm.tri), ]))
  }
  out.sum[, 3] <- c(ultimate, sum(ultimate))
  rm(ultimate, i)
  ## dev.to.date
  out.sum[, 2] <- out.sum[, 1]/out.sum[, 3]

  out.sum[, 4] <- c(0, oyres, sum(oyres))
  out.sum[, 5] <- c(0, apply(reservesorig, 2, mean), sum(apply(reservesorig, 2, mean)))
  out.sum[, 6] <- c(0, abs(PEbsorig), PEbs)
  out.sum[, 7] <- out.sum[, 6]/out.sum[, 4]
  out.sum[, 8] <- c(0, apply(reservesorig, 2, quantile, 0.75, na.rm = TRUE),
                    quantile(sum(reservesorig), 0.75, na.rm = TRUE))
  out.sum[, 9] <- c(0, apply(reservesorig, 2, quantile, 0.95, na.rm = TRUE),
                    quantile(sum(reservesorig), 0.95, na.rm = TRUE))
  out.sum[, 10] <- c(0, apply(reservesorig, 2, quantile, 0.99, na.rm = TRUE),
                     quantile(sum(reservesorig), 0.99, na.rm = TRUE))
  out.sum[is.nan(out.sum)] <- 0

```

```

## Calendar year
labels2 <- paste0("cy", (t+1):(t+ncol(lossData)-1))
out.sum2 <- matrix(NA, ncol = 7, nrow = t-1,
  dimnames = list(labels2,
    c("IBNR", "IBNR.mean", "PredErr.Abs", "CV",
      "IBNR.quantile.75", "IBNR.quantile.95",
      "IBNR.quantile.99"))))

out.sum2[, 1] <- fpv
out.sum2[, 2] <- apply(reservescal, 2, mean)
out.sum2[, 3] <- abs(PEbscal)
out.sum2[, 4] <- out.sum2[, 3]/out.sum2[, 1]
out.sum2[, 5] <- apply(reservescal, 2, quantile, 0.75, na.rm = TRUE)
out.sum2[, 6] <- apply(reservescal, 2, quantile, 0.95, na.rm = TRUE)
out.sum2[, 7] <- apply(reservescal, 2, quantile, 0.99, na.rm = TRUE)

out.sum2[is.nan(out.sum2)] <- 0
}

if (peMethod == "formula"){
  # Summary creation - FORMULA
  ## Origin year
  increm.tri <- Increm.triangle(array(triangglm,
    dim = c(ncol(triangglm), ncol(triangglm), 1)))
  out.sum <- matrix(NA, ncol = 6, nrow = t+1,
    dimnames = list(c(rownames(lossData), "TOTAL"),
      c("Latest", "dev.to.date", "Ultimate",
        "IBNR", "IBNR.PredErr.Abs", "CV"))))

  ## Latest
  out.sum[, 1] <- c(ObtainMDDiagonal(increm.tri[, , 1]),
    sum(ObtainMDDiagonal(increm.tri[, , 1])))
  ## Ultimate
  out.sum[, 3] <- c(increm.tri[, ncol(increm.tri), 1],
    sum(increm.tri[, ncol(increm.tri), 1]))
  ## dev.to.date
  out.sum[, 2] <- out.sum[, 1]/out.sum[, 3]
  ## IBNR
  out.sum[, 4] <- c(0, oyres, tores)
  ## PE
  out.sum[, 5] <- c(0, abs(PEfororig), PEfor)
  ## CV
  out.sum[, 6] <- out.sum[, 5]/out.sum[, 4]
  out.sum[is.nan(out.sum)] <- 0

  #Calendar year
  labels2 <- paste0("cy", (t+1):(t+ncol(lossData)-1))
  out.sum2 <- matrix(NA, ncol = 3, nrow = t-1,
    dimnames = list(labels2,
      c("IBNR", "PredErr.Abs", "CV"))))

  ## IBNR
  out.sum2[, 1] <- fpv

```

```

## Pred. Error
out.sum2[, 2] <- abs(PEforcal)
## CV
out.sum2[, 3] <- out.sum2[, 2]/out.sum2[, 1]
out.sum2[is.nan(out.sum2)] <- 0
}
# Build result object
if (peMethod == "bootstrap"){
  res <- list(triangle = lossData,
             glm.triangle = triangglm,
             glm.model = glmPro,
             summary.oy = out.sum,
             summary.cy = out.sum2,
             params = list("method" = peMethod,
                           "fam" = fam,
                           "link" = link,
                           "B" = B,
                           "seed" = seed,
                           "fpv" = fpv))
}
if (peMethod == "formula"){
  res <- list(triangle = lossData,
             glm.triangle = triangglm,
             glm.model = glmPro,
             summary.oy = out.sum,
             summary.cy = out.sum2,
             params = list("method" = peMethod,
                           "fam" = fam,
                           "link" = link,
                           "fpv" = fpv))
}
class(res) <- "glmprov"
return(res)
}

```